Mer om $E = mc^2$

Version 0.4

Varifrån kommer formeln?

För en partikel med massan m som rör sig med farten v har vi lärt oss att rörelseenergin är

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Denna formel är dock inte korrekt, även om den vid låga hastigheter stämmer bra. Vid höga hastigheter måste man däremot räkna relativistiskt.

Den relativistiska formeln för en partikels rörelseenergi har ett lite mer komplicerat utseende:[1]

$$E_k = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{E_{\text{tot}}} - \underbrace{mc^2}_{E_0},$$

Här är c ljusets hastighet i vakuum.[2] Första termen i högerledet kan vi tolka som partikelns totala energi, E_{tot}. Andra termen kan vi tolka som partikelns *viloenergi* eller *massenergi*, E_0. Partikelns rörelseenergi är alltså differensen mellan totala energin och massenergin.

En partikel har alltså en massenergi som ges av

$$E_0 = mc^2.$$

Kom ihåg att en partikels massa är ett mått på dess tröghet. Ett föremål som har stor massa har stor tröghet, och enligt Newtons andra lag stor förmåga att motstå hastighetsförändringar (eftersom acceleration $\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m}$).

[1] Härledningen av denna är inte trivial, men följer av Einsteins två grundläggande postulat i den speciella relativitetsteorin, som kan formuleras: 1) Fysikens lagar har samma form i alla tröghetssystem (referenssystem som rör sig med konstant hastighet i förhållande till varandra). 2) Ljushastigheten i vakuum är densamma i alla tröghetssystem.

[2] Om man använder att $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ för små x (gör en linjär approximation kring $x = 0$) så kan man visa att den klassiska formeln för rörelseenergin trillar fram ur den relativistiska formeln då $v \ll c$. Kolla gärna själv!

Så långt har vi hållit oss till en partikel. Resonemanget kan dock direkt föras över på vilket system av partiklar som helst. Vi säger då att ett system av partiklar, eller ett föremål om man så vill, med masssan (trögheten) m har en massenergi som ges av

$$E_0 = mc^2. \tag{1}$$

Massenergin för ett system är den totala energin som stoppats in i systemet, och kan utgöras av massenergi hos beståndsdelar, kinetisk energi om dessa har en inre rörelse (till exempel molekylrörelse i en gas) eller bindningsenergi mellan beståndsdelarna.

Tillförs systemet energimängden ΔE_0 så kommer massan (systemets tröghet) att öka med

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2}$$

enligt (1).

Låt oss se vad detta allt detta innebär i vardagliga sammanhang:

Exempel 1: Uppvärmning av vatten
Om 1,0 kg vatten värms 40 K måste energimängden

$$\Delta E_0 = cm\Delta T = 4180 \cdot 1{,}0 \cdot 40 \text{ J} = 1{,}7 \cdot 10^5 \text{ J}$$

tillföras. Då ökar vattnets massa (tröghet) med

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{1{,}7 \cdot 10^5}{(3{,}0 \cdot 10^8)^2} \text{ kg} = 1{,}9 \cdot 10^{-12} \text{ kg}.$$

Exempel 2: Spänna fjäder
Om en fjäder med fjäderkonstanten 10 N/m dras ut 0,10 m ökar fjäderenergin med

$$\Delta E_0 = \frac{kx^2}{2} = \frac{10 \cdot 0{,}10^2}{2} \text{ J} = 0{,}050 \text{ J}.$$

Då ökar fjäderns massa (det vill säga dess tröghet) med

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0{,}050}{(3{,}0 \cdot 10^8)^2} \text{ kg} = 5{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ kg}.$$

Exempel 3: Kolliderande häftmassaklumpar
Två identiska häftmassaklumpar, var och en med massan 0,020 kg rör sig mot varandra med lika stor fart, 3,0 m/s. De kolliderar fullständigt oelastiskt. Rörelsemängdens bevarande innebär att paketets hastighet efter stöten är 0. Den totala rörelseenergin före stöten,

$$E_k = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} = 2 \cdot \frac{0{,}020 \cdot 3{,}0^2}{2}\ \text{J} = 0{,}18\ \text{J},$$

omvandlas till inre energi i häftmassapaketet. Häftmassapaketets energi ökar alltså med $\Delta E_0 = 0{,}18$ J, och massan ökar med

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0{,}18}{(3{,}0 \cdot 10^8)^2}\ \text{kg} = 2{,}0 \cdot 10^{-18}\ \text{kg}.$$

Massan efter stöten är alltså inte 0,040 kg utan 0,040 000 000 000 000 002 kg.

Som synes är effekterna i vardagliga sammanhang ytterst marginella, så vi har inte missat något viktigt hittills när vi bortsett från dessa massökningar. Vid kärnfysikaliska fenomen är dock effekterna långt ifrån försumbara, som vi ska se alldeles strax.

Några viktiga saker att tänka på innan vi går vidare:

- Notera att det inte är så att vattnet i exempel 1 "sväller", eller att vattenmolekylerna blir lite större eller att något annat märkligt händer när massan ökar vid uppvärmningen. Det finns fortfarande lika många vattenmolekyler kvar som före uppvärmningen, och de ser likadana ut, men systemets tröghet (massa) har ökat något.

  När vi började A-kursen sa vi att massa var ett mått på mängden materia. Försök att glömma det nu! I klassisk mekanik fungerar det bra att tänka så, men när vi börjar arbeta relativistiskt kan detta leda tankarna fel. Bättre är att tänka att massa är ett mått på ett föremåls tröghet, varken mer eller mindre.

- Ibland sägs slarvigt att formeln (1) innebär att massa kan omvandlas till energi och vice versa. Det är egentligen inte korrekt att säga så. Ett föremål har massa likväl som det har massenergi, och dessa är proportionella mot varandra. Massa och massenergi är så att säga två sidor av samma mynt.

  Däremot är det så att under speciella omständigheter kan *materia* förvandlas till *elektromagnetisk strålning*. Detta kan ske när en en partikel möter sin antipartikel och de båda annihileras. Vad som händer energimässigt då är att partiklarnas ursprungliga rörelse- och massenergi övergår till strålningsenergi.

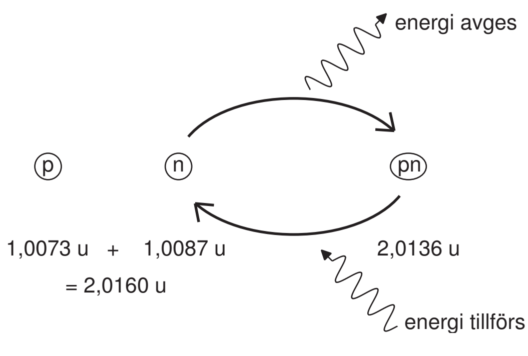
- Man ska alltså inte blanda ihop materia och strålning som är ett slags ting (något som finns), och massa och energi som är *egenskaper* hos ting. Vi säger att materia har massa, eller massenergi om man så vill. Strålning har energi.

Hur används formeln?

Nu ska vi se hur massa-energiekvivalensen kan användas vid kärnfysikaliska beräkningar. Det väsentliga att ha med sig från ovanstående är:

- En bit materia med massan m har energiinnehållet $E_0 = mc^2$. Viloenergin E_0 är alltså proportionell mot massan m.
- Om ett föremål avger energin ΔE minskar dess massa (tröghet) med $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$.

Exempel 4: Bindningsenergi för ${}^2_1$H.



Massdefekten $\Delta m = (2{,}0160 - 2{,}0136)$ u $= 0{,}0024$ u $= 3{,}98 \cdot 10^{-30}$ kg.
Bindningsenergin $E = \Delta mc^2 = 3{,}98 \cdot 10^{-30} \cdot (3{,}00 \cdot 10^8)^2$ J $= 3{,}6 \cdot 10^{-13}$ J $=$ 2,2 MeV.

Exempel 5: Frigjord energi vid kärnreaktionen ${}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He}$ + energi

Massdifferensen $\Delta m = (2 \cdot 2{,}0141 - 4{,}0026)$ u $= 0{,}0256$ u.
Frigjord energi $E = \Delta mc^2 = \ldots = 3{,}82 \cdot 10^{-12}$ J $= 24$ MeV.

Vid den här typen av beräkningar är följande enhetsomvandlingar användbara:

- $1 \text{ u} = 1{,}66054 \cdot 10^{-27}$ kg
- $1 \text{ eV} = 1{,}60218 \cdot 10^{-19}$ J

Tänk också på att (1) innebär att

- $1 \text{ u} \leftrightarrow 931, 49$ MeV

Exempel 6: Frigjord energi vid α-sönderfallet

$$^{226}_{88}\text{Ra} \to {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Total massa före: 226,025 410 u.
Total massa efter: $222,017\,578$ u + 4,002 603 u = 226,020 181 u.
Massdifferensen $\Delta m = (226{,}025\,410 - 226{,}020\,181)$ u $= 0{,}005\,229$ u.
Frigjord energi $E = \Delta mc^2 = \ldots = 7{,}80 \cdot 10^{-13}$ J = 4,87 MeV.

Observera att formelsamlingen egentligen ger nuklidmassan, som inkluderar elektronerna runt kärnan. Vill man ha kärnmassan behöver man alltså subtrahera totala massan för elektronerna. I alla fall utom β^+-sönderfall fungerar det dock att räkna med nuklidmassor utan att man behöver tänka på denna komplikation. Vi tar ett exempel för att visa detta:

Exempel 7: Frigjord energi vid β^--sönderfallet

$$^{66}_{28}\text{Ni} \to {}^{66}_{29}\text{Cu} + {}^{\;\,0}_{-1}\text{e} + \bar{\nu}.$$

Massdifferensen

$$\begin{aligned}
\Delta m &= m(^{66}\text{Ni}) - 28m_e - [m(^{66}\text{Cu}) - 29m_e + 1m_e] \\
&= m(^{66}\text{Ni}) - m(^{66}\text{Cu}) \\
&= (65{,}929\,139 - 65{,}928\,869)\text{ u} \\
&= 0{,}000\,270\text{ u.}
\end{aligned}$$

Frigjord energi

$$E = \Delta mc^2 = \ldots = 4{,}03 \cdot 10^{-14}\text{ J} = 252\text{ keV.}$$

Vid β^+-sönderfall måste man däremot tänka på att verkligen arbeta med kärnmassor:

Exempel 8: Frigjord energi vid β^+-sönderfallet

$$ {}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + \nu. $$

Massdifferensen

$$
\begin{aligned}
\Delta m &= m({}^{23}\mathrm{Mg}) - 12m_e - [m({}^{23}\mathrm{Na}) - 11m_e + 1m_e] \\
&= m({}^{23}\mathrm{Mg}) - m({}^{23}\mathrm{Na}) - 2m_e \\
&= (22{,}994\,124 - 22{,}989\,769 - 2 \cdot 0{,}000\,549)\ \mathrm{u} \\
&= 0{,}003\,257\ \mathrm{u}
\end{aligned}
$$

Frigjord energi

$$ E = \Delta mc^2 = \ldots = 3{,}03\ \mathrm{MeV}. $$

Går formeln att förstå?

Tja, jag vet inte. Det beror på vad man menar med att "förstå". Den går åtminstone att vänja sig vid. Och där får vi kanske nöja oss. Att vi med hjälp av formeln kan göra beräkningar och förutsägelser som kan kollas med experiment (och som visar sig stämma) räcker kanske?

Vidareläsning

R. Baierlein, Phys. Teach. March 1991, s. 170–175.
R. Alphonce m. fl., *Fysik för gymnasieskolan B* (Natur och Kultur, 1998).
R. P. Feynman, R. B. Leighton och M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, 1966), vol. 1.