

3242

Visa att $x + \frac{1}{x} \geq 2$ för $x > 0$.

Lösning:

Bilda funktionen $f(x) = x + \frac{1}{x}$ och undersök grafen.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

Derivatans nollställen

$$f'(x) = 1 + (-1)x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ ger } 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

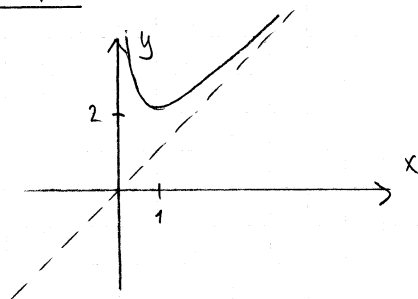
Teckentabell

x	$(-\infty)$	0	(∞)
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		\searrow	\nearrow
			MIN

Extremvärden

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Grafen



x -värdet långt från 0: $f(x) \approx x$

x -värdet nära 0: $f(x) \approx \frac{1}{x}$

y -axeln och linjen $y = x$ är alltså asymptoter till grafen.

3242

Eftersom $f(x)$ har minsta värdet 2 (för $x > 0$)

(forts)

har vi visat att

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{för } x > 0 \quad \square$$
