

4452

$$\underbrace{z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 = 0}_{p(z)} \quad (*)$$

$$p(i) = i^4 - i^3 - 5i^2 - i - 6 = 1 - (-i) - 5(-1) - i - 6 \\ = 1 + i + 5 - i - 6 = 0$$

(faktorsatsen)

Alltså är $z_1 = i$ en rot till (*), och då är $(z - i)$ en faktor i $p(z)$

Men om $z_1 = i$ är en rot så är också $z_2 = \bar{z}_1 = -i$ en rot till (*),
(ekv. med reella koefficienter \Rightarrow konjugerade rötter)

och då är $(z - (-i)) = (z + i)$ en faktor i $p(z)$ (enligt faktorsatsen)

Vi har alltså att $p(z)$ innehåller både faktorn $(z - i)$ och faktorn $(z + i)$,

Då kan $p(z)$ skrivas

$$p(z) = (z - i)(z + i) q(z) = (z^2 + 1) q(z) \quad \text{ett polynom (av grad 2)}$$

Bestäm $q(z)$:

$$\begin{array}{r} z^2 - 1z - 6 \\ \hline z^4 - 1z^3 - 5z^2 - 1z - 6 \\ - (z^4 \quad \quad + 1z^2) \\ \hline -1z^3 - 6z^2 - 1z \\ - (-1z^3 \quad \quad - 1z) \\ \hline -6z^2 \quad \quad - 6 \\ - (-6z^2 \quad \quad - 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Alltså:

$$p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - z - 6)$$

Ekvationen (*) kan då skrivas

$$(z^2 + 1)(z^2 - z - 6) = 0$$

4452

(forts)

Nollproduktmetoden ger nu

$$z^2 - z - 6 = 0$$

($z^2 + 1 = 0$ ger två nya rötter)

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6 \cdot 4}{4}}$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$z_3 = -2, z_4 = 3$$

Svar: $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = -2, z_4 = 3$

