2306

(c) Visa att $\boxed{2+4+8+\ldots+2^n = 2^{n+1}-2}$ (*) för $n = 1, 2, 3, \ldots$

1) För $n=1$ är $VL = 2^1 = 2$ och $HL = 2^{1+1} - 2 = 2^2 - 2 = 2$.

Påståendet (*) är alltså sant för $n = 1$.

2) Antag att påståendet (*) är sant för $n = p$. Då gäller

induktionsantagandet

$$VL_p = 2+4+8+\ldots+2^p = 2^{p+1} - 2 = HL_p \qquad (IA)$$

Vi ska nu visa att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$, dvs att $2+4+\ldots+2^{p+1} = 2^{p+1+1} - 2$

I så fall får vi

$$VL_{p+1} = 2+4+8+\ldots+2^p+2^{p+1} = VL_p + 2^{p+1} \overset{IA}{=} HL_p + 2^{p+1}$$

$$= 2^{p+1} - 2 + 2^{p+1} = 2 \cdot 2^{p+1} - 2$$

$$HL_{p+1} = 2^{p+1+1} - 2 = 2 \cdot 2^{p+1} - 2$$

$$VL_{p+1} = HL_{p+1}$$

Om påståendet (*) är sant för $n = p$ är det alltså sant för $n = p+1$.

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen är påståendet (*) sant för alla heltal $n \geq 1$ $\square$.