2315

(a) Visa att $\boxed{(1+n)^2 \geq 1+n^2}$ (*) för $n = 1, 2, 3, \ldots$

1) För $n=1$ är $VL = (1+1)^2 = 4$ och $HL = 1+1^2 = 2$.

Påståendet (*) är alltså sant för $n=1$.

2) Antag att påståendet (*) är sant för $n=p$. Då gäller

$$(1+p)^2 \geq 1+p^2$$

$$(1+p)^2 - (1+p^2) \geq 0$$

$$1+2p+p^2-1-p^2 \geq 0$$

$$2p \geq 0$$

(IA) induktionsantagandet

Vi ska nu visa att

$$(1+(p+1))^2 \geq 1+(p+1)^2$$

vilket vi kan skriva som

$$(2+p)^2 - (1+(p+1)^2) \geq 0.$$

Undersök differensen i VL:

$$(2+p)^2 - (1+(p+1)^2) = 4+4p+p^2-(1+p^2+2p+1)$$

$$= 2+2p \geq 2+0 > 0$$

Enligt IA är $2p \geq 0$.

Om påståendet (*) är sant för $n=p$ är det alltså sant för $n=p+1$.

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen är påståendet (*) sant för alla heltal $n \geq 1$. □

$\boxed{2315}$

(forts)

(b) Visa att $\boxed{2^n \geq n^2}$ (*) för $n = 4, 5, 6, \ldots$

1) För $n = 1$ är $VL = 2^1 = 2$ och $HL = 1^2 = 1$.

Påståendet (*) är alltså sant för $n = 1$.

2) Antag att påståendet är sant för $n = p$. Då gäller

$$2^p \geq p^2$$

$$2^p - p^2 \geq 0 \qquad (IA)$$

induktionsantagandet

Vi ska nu visa att

$$2^{p+1} \geq (p+1)^2$$

vilket vi kan skriva som

$$2^{p+1} - (p+1)^2 \geq 0$$

Undersök differensen i VL:

$$2^{p+1} - (p+1)^2 = 2 \cdot 2^p - (p^2 + 2p + 1)$$

$$= 2 \cdot 2^p - p^2 - 2p - 1$$

Vi subtraherar och adderar p^2 för att få en term $-2p^2$

$$= 2 \cdot 2^p - p^2 - p^2 + p^2 - 2p - 1$$

$$= 2 \cdot 2^p - 2 \cdot p^2 + p^2 - 2p - 1$$

$$= 2\underbrace{(2^p - p^2)}_{\geq 0 \text{ enl. IA}} + \underbrace{p^2 - 2p - 1}_{> 0 \text{ för } p \geq 4, \text{ se } \nearrow} > 0$$

Om påståendet (*) är sant för $n = p$

är det alltså sant för $n = p + 1$.

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen

är påståendet (*) sant för alla heltal $n \geq 4$.

□

Vi behöver övertyga oss om att $p^2 - 2p - 1 > 0$ för $p \geq 4$

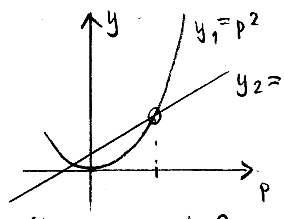
Skriv om olikheten:

$p^2 > 2p + 1$

Bilda $y_1 = p^2$ och

$y_2 = 2p + 1$

och undersök grafiskt:



Skärningspunkt? $y_1 = y_2$ ger

$p^2 - 2p - 1 = 0$

$p = 1 \pm \sqrt{1+1}$

$p = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4$

Alltså är $y_1 > y_2$ för $p \geq 4$,

och därmed är

$p^2 - 2p - 1 > 0$ för $p \geq 4$