$\boxed{18}$

Bl. övn 1-3

Visa att $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}}$ (*) för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Vi noterar först att summan i VL kan skrivas

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

1) För $n = 1$ är $VL = \frac{1}{1^2} = 1$ och $HL = 2 - \frac{1}{1} = 1$

Påståendet (*) är alltså sant för $n = 1$.

2) Antag att påståendet (*) är sant för $n = p$. Då gäller

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{p^2} \leq 2 - \frac{1}{p}$$

vilket vi kan skriva som

$$2 - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{p^2}\right) \geq \frac{1}{p} \qquad (IA)$$

Anledningen till att vi gör denna omskrivning är att uttrycket i VL kommer att dyka upp nedan

Vi ska nu visa att

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{p+1}$$

Vi skriver om detta till

$$2 - \frac{1}{p+1} - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) \geq 0$$

Ofta lättare att visa att $A - B \geq 0$ än att $A \geq B$. (eller $B \leq A$)

Undersök differensen i VL:

Vill nu visa att $VL \geq 0$

tex 6 4

Om $a \geq b$ måste $a - A \geq b - A$

$6-2 \quad 4-2$

$$2 - \frac{1}{(p+1)} - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{(p+1)^2}$$

IA

$$= 2 - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$$

18

Bl.övn 1-3

(forts.)

$$= \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) = \frac{1}{p} - \frac{p+1 \quad +1}{(p+1)^2}$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{p+2}{(p+1)^2} = \frac{(p+1)^2}{p(p+1)^2} - \frac{p(p+2)}{p(p+1)^2}$$

$$= \frac{(p+1)^2 - p(p+2)}{p(p+1)^2} = \frac{p^2 + 2p + 1 - p^2 - 2p}{p(p+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{p(p+1)^2} \geq 0 \quad \text{eftersom } p > 0$$

Om påståendet (*) är sant för $n = p$ är det alltså sant för $n = p+1$.

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen är påståendet (*) sant för alla heltal $n \geq 1$. $\square$