$\boxed{11}$

Bl. övn 2

Visa att $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \le \frac{n^2}{n+1}}$ (*) för $n = 1, 2, 3, \ldots$

(Summan i VL kan skrivas

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} \quad)$$

1) För $n=1$ är $VL = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ och $HL = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$

Påståendet (*) är alltså sant för $n=1$.

2) Antag att påståendet (*) är sant för $n=p$. Då gäller

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{k+1} \le \frac{p^2}{p+1} \qquad \text{(IA)} \text{ induktions-antagandet}$$

Vi ska nu visa att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{k+1} \le \frac{(p+1)^2}{p+1+1}$$

vilket vi kan skriva som

$$\frac{(p+1)^2}{p+2} - \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{k+1} \ge 0$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{k+1} + \frac{(p+1)}{p+1+1}$$

Undersök differensen i VL:

$$\frac{(p+1)^2}{p+2} - \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{k+1} + \frac{p+1}{p+1+1} \right)$$

$$= \frac{(p+1)^2}{p+2} - \frac{p+1}{p+2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{k+1} \underset{\text{IA}}{\ge} \frac{(p+1)^2}{p+2} - \frac{p+1}{p+2} - \frac{p^2}{p+1}$$

tex 4 6

Om $a \le b$ måste

$A - a \ge A - b$

10 - 4 10 - 6

$\boxed{11}$

Bl öm 2

(forts.)

$$= \frac{p^2 + 2p + 1 - p - 1}{p+2} - \frac{p^2}{p+1} = \frac{p^2 + p}{p+2} - \frac{p^2}{p+1}$$

$$= \frac{(p^2+p)(p+1)}{(p+2)(p+1)} - \frac{p^2(p+2)}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{p^3 + p^2 + p^2 + p - p^3 - 2p^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p}{(p+1)(p+2)} \geq 0 \text{ eftersom } p > 0$$

Om påståendet $(*)$ är sant för $n = p$ är det alltså sant för $n = p+1$

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen är påståendet $(*)$ sant för alla heltal $n \geq 1$. $\square$