Delbarhet och primtal

Talet 35 är delbart med 7 eftersom $35 = 5 \cdot 7$

7 är en faktor i 35

7 är en delare (divisor) till 35

35 är en multipel av 7

kan skrivas $7|35$

De hela talen kan delas in i jämna och udda tal.

De positiva heltalen kan delas in i primtal

ett primtal är bara delbart med 1 och sig själv

och sammansatta tal.

Aritmetikens fundamentalsats

Varje naturligt tal större än 1 kan entydigt skrivas som en produkt av primtal.

Delbarhetsregler

Ett heltal är delbart med ...

2 om sista siffran är delbar med 2

3 om siffersumman delbar med 3

4 om talet som bildas av de två sista siffrorna är delbart med 4

5 om sista siffran är 0 eller 5

6 om talet är delbart med 2 och 3 (se ovan)

[7 stryk entalssiffran och subtrahera från det tal som återstår dubbla entalssiffran, om detta tal är delbart med 7 är det ursprungliga talet delbart med 7]

8 om talet som bildas av de tre sista siffrorna är delbart med 8

9 om siffersumman är delbar med 3

10 om talet slutar på 0

[11 om en siffersumma där siffrorna förses omväxlande med minus- och plustecken (börja med entalssiffran) är delbar med 11]

Största gemensamm faktor, minsta gemensamma multipel

Relativt prima

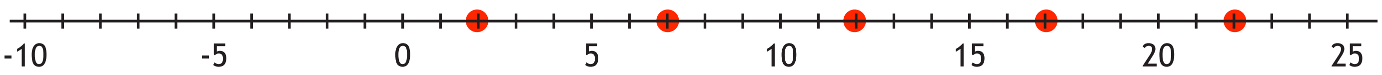
EJ KLART!

EJ KLART!

Kongruens

Ex: Dividerar vi 22 med 5 ”går det inte jämnt upp”

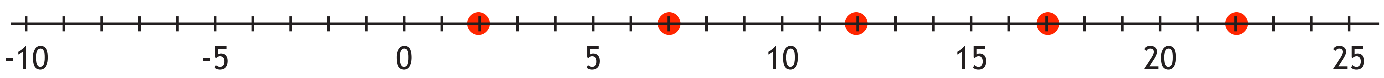
$$22 = \underbrace{4}_{\text{kvot}} \cdot 5 + \underbrace{2}_{\text{rest}}$$



[redacted]

Ex: Dividerar vi 22 (eller 17 eller 12) med 5 ”går det inte jämnt upp”

$$22 = \underbrace{4}_{\text{kvot}} \cdot 5 + \underbrace{2}_{\text{rest}}$$



$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

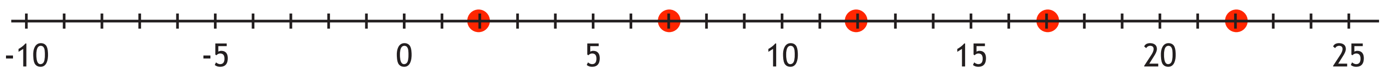
Kongruens

[redacted]

Kongruens

Ex: Dividerar vi 22 (eller 17 eller 12) med 5 ”går det inte jämnt upp”

$$22 = \underbrace{4}_{\text{kvot}} \cdot 5 + \underbrace{2}_{\text{rest}}$$



$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

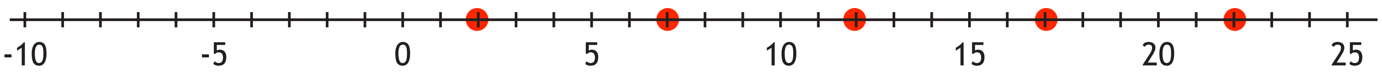
22 och 17 sägs vara kongruenta modulo 5, vilket skrivs

$$22 \equiv 17 \pmod 5 \qquad\qquad 22 \equiv_5 17$$

Kongruens

Ex: Dividerar vi 22 (eller 17 eller 12) med 5 ”går det inte jämnt upp”

$$22 = \underbrace{4}_{\text{kvot}} \cdot 5 + \underbrace{2}_{\text{rest}}$$



$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

22 och 17 sägs vara kongruenta modulo 5, vilket skrivs

$$22 \equiv 17 \pmod 5 \qquad\qquad 22 \equiv_5 17$$

Att 22 och 17 är kongruenta modulo 5 innebär att...

(1) 22 och 17 ger samma rest vid division med 5

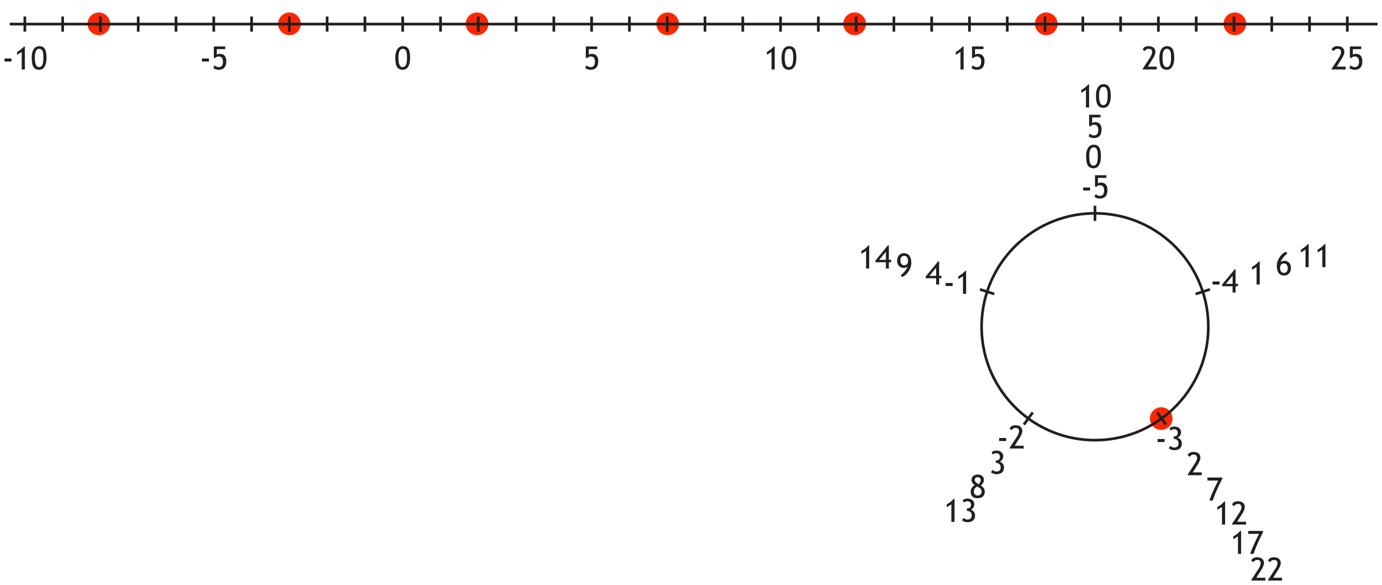
(2) 22 – 17 är delbart med 5

(3) 22 och 17 skiljer sig åt med en multipel av 5

[redacted]

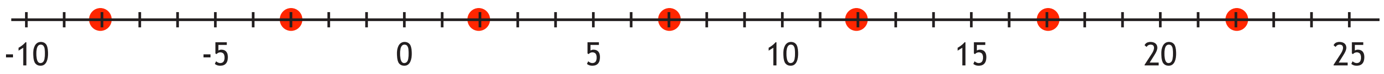
Kongruens

Ex: Notera att $22 \equiv 17 \equiv 12 \equiv 7 \equiv 2 \equiv -3 \equiv -8 \pmod 5$



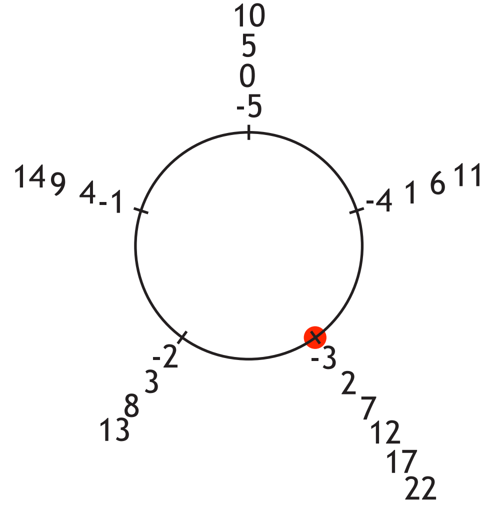
Kongruens

Ex: Notera att $22 \equiv 17 \equiv 12 \equiv 7 \equiv 2 \equiv -3 \equiv -8 \pmod 5$



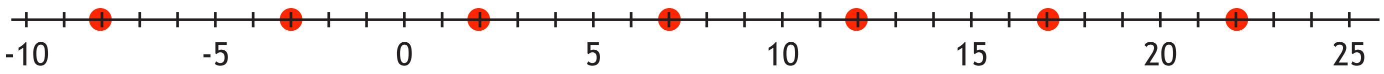
Notera särskilt att $22 \equiv 2 \pmod 5$

resten vid division av 22 med 5



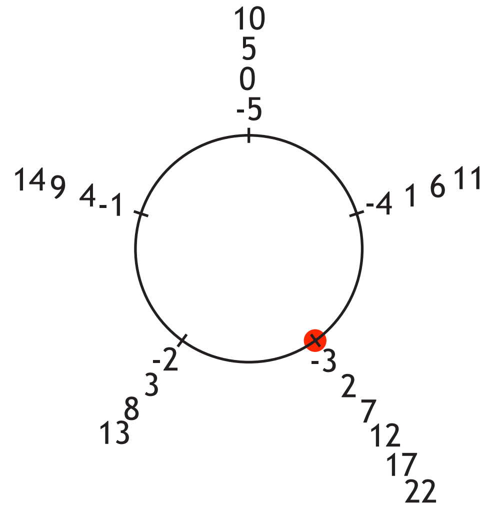
Kongruens

Ex: Notera att $22 \equiv 17 \equiv 12 \equiv 7 \equiv 2 \equiv -3 \equiv -8 \pmod 5$



Notera särskilt att $22 \equiv 2 \pmod 5$

resten vid division av 22 med 5



Håll isär!

$22 \pmod 5) = 2$ betyder

att 22 ger resten 2 vid division med 5

Undvik!

[redacted]

Kongruens

Def.

Två heltal a och b är kongruenta modulo n, vilket skrivs $a \equiv b \pmod{n}$ om differensen $a - b$ är delbar med n.

dvs om n delar $a - b$

Alt def.

$a \equiv b \pmod{n}$ om a och b ger samma rest vid division med n.

[redacted]

Kongruens

Def.

Två heltal a och b är kongruenta modulo c, vilket skrivs $a \equiv b \pmod{c}$ om differensen $a - b$ är delbar med c.

dvs om c delar $a - b$

Alt def.

$a \equiv b \pmod{c}$ om a och b ger samma rest vid division med c.

Räknelagar för kongruensräkning

Om $a_1 \equiv b_1 \pmod{c}$ och $a_2 \equiv b_2 \pmod{c}$ gäller

$$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{c}$$

$$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{c}$$

Om $a \equiv b \pmod{c}$ gäller

$$m \cdot a \equiv m \cdot b \pmod{c} \quad (m \text{ heltal})$$

$$a^n \equiv b^n \pmod{c} \quad (n \text{ positivt heltal})$$

Kombinerar vi räknelagarna får vi

Om $a_1 \equiv b_1 \pmod{c}$ och $a_2 \equiv b_2 \pmod{c}$ gäller

$$m_1 a_1^{n_1} + m_2 a_2^{n_2} \equiv m_1 b_1^{n_1} + m_2 b_2^{n_2} \pmod{c} \qquad (m_1,\ m_2 \text{ heltal; } n_1,\ n_2 \text{ positiva heltal})$$

Kongruens

Tips vid kongruensräkning

För varje potens:

1) Reducera basen.
2) Skriv om potensen med hjälp av potenslagar
   så att vi får någon potens som går att reducera (kolla först vilka dessa är).

Talsystem med olika baser

EJ KLART!

EJ KLART!

Talföljder

EJ KLART!

EJ KLART!

Induktionsbevis

Induktionsprincipen

Låt A_n vara en utsaga som är formulerad för alla heltal $n \geq 1$ och som uppfyller att:

1. A_1 är sann
2. om A_p är sann för ett heltal $p \geq 1$ så är också A_{p+1} sann.

Då måste A_n vara sann för varje heltal $n \geq 1$

I praktiken:

Visa att nåt gäller för $n = 1$.

Antag att det gäller för $n = p$. Använd detta för att visa att det gäller för $n = p + 1$.

Då måste det gälla för alla $n \geq 1$

Induktionsbevis

När det är formler som ska visas:

Visa att $\boxed{\ldots \quad = \quad \ldots}$ (*) för n = 1, 2, 3, …

1) För n = 1 är VL = $\boxed{}$ och HL = $\boxed{}$

Påståendet (*) är alltså sant för n = 1.

2) Antag att påstående (*) är sant för n = p. Då gäller

$VL_p = \boxed{} = \boxed{} = HL_p$ *Induktionsantagandet (IA)*

I så fall får vi

$VL_{p+1} = \boxed{}$

$HL_{p+1} = \boxed{}$

Här ska visas att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ med hjälp av IA.

Om påståendet (*) är sant för n = p är det alltså sant för n = p + 1.

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen är påståendet (*) sant för alla heltal $n \geq 1$.