

På samma sätt bevisas, att  $\angle N$  är  $= \angle DFE$ , och då måste  $\angle L$  vara  $= \angle D$  (I: 32, f.). V. S. G.

Anm. Av I: 13; I: 17 följer, att

$$u_1 + v_1 = u + v > 2R.$$

**Sats 4. Problem.**

(Fig. 138.) Att inskriva en cirkel i en given triangel.

*Analys.* Den sökta cirkeln skall tangera alla tre sidorna i  $\triangle ABC$ . Av III: 17 anm. inses, att man för att finna denna cirkels medelpunkt måste skära två av  $\triangle$ :ns vinklar mitt itu.

*Lösning.* Skär därför  $\angle ABC$  och  $\angle ACB$  mitt itu genom  $BD$  och  $CD$ , vilka råkas (I: 28, A) i  $D$ , och fäll  $DE \perp AB$ ,  $DF \perp BC$ ,  $DG \perp AC$ . Emedan  $\angle DBE$  är  $= \angle DBF$  och  $\angle DEB = R = \angle DFB$  samt sidan  $BD$  gemensam, så är  $\triangle DEB \cong \triangle DFB$  (3:e kongr. f.), således  $DE = DF$ . På samma sätt bevisas, att  $DG$  är  $= DF$ . Således är  $DE = DF = DG$ . Uppritar man nu en cirkellinje, som har  $D$  till medelpunkt och

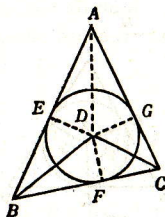


Fig. 138.

går genom en av punkterna  $E, F, G$ , så måste den också gå genom de övriga. Den tangeras ock av sidorna, emedan vinklarna vid  $E, F, G$  äro  $= R$  (III: 2, f. 3). V. S. G.

*Anm.* Här uppstår den frågan, om det går an att skära vilka två vinklar som helst i triangeln mitt itu. Att så är, kan lätt visas. Sammanbindes  $A$  med  $D$ , så följer av 4:e kongr. f., att  $\angle DAE$  är  $= \angle DAG$ , eller att om två vinklar i en  $\triangle$  delas mitt itu samt de tudelande linjernas skärningspunkt sammanbindes med den tredje vinkelns spets, så blir denna vinkel även mitt ituskuren. Denna sats kan ock uttryckas sålunda: *de tre bisektriserna i en triangel råka varandra i en och samma punkt (den inskrivna cirkels medelpunkt).*

**Sats 5. Problem.**

(Fig. 139 a, b, c.) Att omskriva en cirkel kring en given triangel ( $ABC$ ).

*Analys.* Emedan cirkellinjen skall gå genom  $A$  och  $B$ , så är  $AB$  en korda; men medelpunkten måste ligga på kordans

mittpunktsnormal (III: 1). Likaledes måste medelpunkten ligga på mittpunktsnormalen till  $AC$ .

Härav fås följande lösning.

*Lösning.* Skär två sidor  $AB$  och  $AC$  mitt itu i  $D$  och  $E$  resp. och drag  $DF \perp AB$  och  $EF \perp AC$ .

*Påstående:* Punkten  $F$ , där dessa linjer råkas (I: 28, A. Jfr övn. 51, s. 57), är medelpunkt till den omskrivna cirkeln.

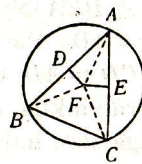


Fig. 139 a.

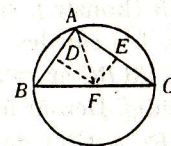


Fig. 139 b.

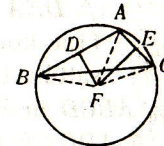


Fig. 139 c.

*Konstr.* Man behöver blott bevisa, att  $F$  ligger lika långt från alla vinkelspetsarna. Sammanbind därför  $F$  med  $A, B$  och  $C$ .

*Bevis.*  $FB = FA$  (lösn.),  $FA = FC$  (lösn.),  $\therefore FB = FA = FC$ .

Tager man således  $F$  till medelpunkt för en cirkellinje, som går genom  $A$ , så måste den ock gå genom  $B$  och  $C$  samt är följaktligen den omskrivna cirkeln (def. 6). V. S. G.

*Följdsats.* Genom tre punkter, som ej ligga i rät linje, kan blott en cirkellinje gå och denna är genom dem fullt bestämd.

*Anm. 1.* Om genom skärningspunkten till två sidors mittpunktsnormaler i en triangel en linje fälles vinkelrät mot den tredje sidan, så blir denna även delad mitt itu (III: 3). Detta kan ock uttryckas sålunda: *de tre mittpunktsnormalerna i en triangel träffas i en och samma punkt (den omskrivna cirkels medelpunkt).* Jfr övn. 30, s. 33.

*Anm. 2.* Läget av punkten  $F$  är olika, allteftersom  $\triangle$ :ns största vinkel är spetsig, rät eller trubbig. Är vinkeln spetsig, så är det segment, vari den står, större än halvcirkeln: således faller  $F$  i detta fall inom  $\triangle$ :n, fig. 139: a; är den största  $\angle = R$ , så är segmentet, vari den står, lika med halvcirkeln, och  $F$  faller i den punkt, där hypotenusan är mitt ituskuren, fig. 139: b (jfr I: 34 B); är slutligen  $\triangle$ :ns största vinkel trubbig, så är det segment, vari den står, mindre än halvcirkeln, och medelpunkten faller då utom  $\triangle$ :n, fig. 139: c.