Ytans symmetriegenskap. I I: 4 talas ej blott om direkt kongruens, utan även om symmetrisk kongruens. Vid beviset härför förutsättes en ny egenskap hos ytan nämligen den, att en del av ytan, fattad materiellt, kan tagas bort, vändas om och åter läggas tillbaka (på avigsidan), så att den kommer att helt och hållet ligga i ytan. Denna nya egenskap kan emellertid under vissa kontinuitetsbetingelser *bevisas* gälla för planet.

I fråga om klotet kan man inte utan vidare taga ut en tunn kalott, vända utsidan till och få den att ånyo passa till klotet. Men liksom man kan vända ut och in på ett klädesplagg, så kan man vända ut och in på kalotten, om den fattas såsom böjlig, och då passar den till klotet. Beviset för denna sats stöder sig på planets symmetriegenskap och tillhör stereometrin.

Anm. För sfären och psevdosfären gäller ett femte kongruensfall, som inte gäller för planet, nämligen att två trianglar äro kongruenta, om vinklarna i den ena äro lika med var sin vinkel i den andra.

De övriga axiomen. De aritmetiska axiomen 1—7 kunna lätt *bevisas* för räta linjer, cirkelbågar i lika stora cirklar samt vinklar. Återstår *antagandet*, att ax. 3 och 7 gälla för ytor.

Anm. I fråga om ax. 2 för vinklar har man att iakttaga, att man kan bilda summan av två vinklar på två sätt, varvid figurerna bli symmetriska.

Axiomen 8 och 9 kunna betraktas som definitioner på begreppen $\gtreqless$; ax. 10 tillhör definitionen på den räta linjen, och ax. 11 kan lätt bevisas. Av ax. 11 följer sedan, att om två räta linjer, som råka varandra i en punkt utdragas åt denna punkt till, så skära de varandra.

Sammanfattning. Def. 1. *Ytan*, på vilken figurerna uppritas, skall vara sådan, att en figur v. s. h. kan flyttas huru helst i ytan utan att linjer, vinklar och ytor i figuren ändra storlek — förflyttningsaxiomet.

Lemma 1 (lånesats). Om en figur tages ut ur ytan och vändes om, kan den åter läggas ner i ytan helt och hållet (ytans symmetriegenskap).

Def. 2. Räta linjer äro sådana i ytan dragna linjer, som aldrig råka varandra två och två i mer än en punkt, huru de än förflyttas, såvida de ej falla utefter varandra.

Ax. 1. Genom två punkter v. s. h. i ytan kan man alltid draga en rät linje (= Euklides' post. 1).

Följdsats 1. En rät linje kan förlängas. Den kan nämligen enl. def. 1 förflyttas längs sig själv.

(Fig. 158.) *Följdsats 2.* En rät linje kan ej dragas ut på mer än ett sätt åt vartdera hållet. Ty om räta linjen AB kunde dragas ut både i riktningen BC och i riktningen BD, så skulle den räta linje, som förbinder en punkt E på BD med en punkt F på andra sidan om BC (ax. 1) råka den givna räta linjen (utdragen) i ännu en punkt, vilket strider mot def. 2.

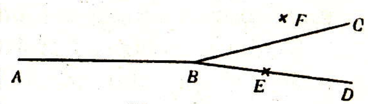

Fig. 158.

Def. 3. En geometrisk storhet A (linje, vinkel, yta) säges vara *lika stor* som en annan B, om deras delar kunna läggas på varandra så, att båda storheternas alla delar sammanfalla. Om däremot alla delar av A därvid falla in på B, men ej tvärtom, säges A vara *mindre* än B och B *större* än A.

Följdsats. Alla räta vinklar äro lika stora.

Ax. 2. Om A är $\gtreqless B$ vid ett tillfälle, så är A *alltid* $\gtreqless B$ resp.

Lemma 2. Om vinkelsumman i en enda triangel är $\gtreqless 2R$, så är vinkelsumman i alla trianglar $\gtreqless 2R$ resp.

För *sfären*	är vinkelsumman		$> 2R$.
» *planet*	»	»	$= 2R$.
» *psevdosfären*	»	»	$< 2R$.