

Anm. Genom att närmare granska Euklides' axiom ha vi funnit, att de delvis kunna bevisas och delvis reduceras till definitioner. Det återstår dock två axiom, vilkas natur ej är tillrättalagd. Det första kan visserligen räknas till ytans definition, men existensen av ytor, som hava denna egenskap är icke bevisad.

Vidare finnas en del förutsättningar (axiom), som här inte ha medtagits, särskilt må nämnas antagandet, att ytan, cirkeln och rätta linjen äro *kontinuerliga*. Så antages i satserna I: 1 och 22, att om en cirkellinje faller delvis inom och delvis utom en annan, så måste de båda cirkellinjerna hava någon punkt gemensam. I I: 12 göres ett motsvarande antagande om en cirkellinje och en rät linje. I ax. 12 göres motsvarande antagande om två rätta linjer.

Slutligen antages i I: 16, att en rät linje (*BE*), som för-
enar två punkter på en triangels (*ABC*) omkrets, faller inuti triangeln.

Den geometriska paradoxen.

En lucka i definitionerna. Enligt föregående sammanfattning förutsättes, att en geometrisk storhet kan flyttas från ett ställe till ett annat utan att ändras till sin storlek, men begreppen $\cong$ definieras endast med hänsyn till storhetens läge efter förflyttningen. Då det alltså saknas en definition på dessa begrepp för storheter, som ännu befinna sig på olika ställen, så är det absolut omöjligt att avgöra, om en geometrisk storhet ändrar storlek vid förflyttningen, och därmed förfaller grundförutsättningen för def. 1 och således även för allt det andra: geometrin saknar således alldeles en fast mark att bygga på.

Å andra sidan säger erfarenheten, att geometrin trots allt bygger på en fast grund. Vid närmare undersökning därav finner man, att denna grund inte är av logiskt-

matematisk natur, utan den är rent empirisk, i det man utgår från erfarenheten om oföränderliga kroppar. Om jag också inte kan geometriskt definiera kropparnas oföränderlighet, så finns det dock i min erfarenhet kroppar, som förefalla att vara oföränderliga. Det är till en dylik erfarenhet, som def. 1 refererar och inte till en klar definition. Geometrins grund är sålunda inte att anse som osäker eller ohållbar, men den är oklar.

Luckan är endast skenbar. I själva verket är det omöjligt att rent geometriskt definiera, vad som menas med att *två rätta linjer, som råkas i samma punkt*, äro lika stora. De kunna vara till utseendet hur olika som helst, man kan alltid betrakta dem som lika stora, blott detta antagande inte kommer i strid med andra antaganden i figuren. En cirkellinje, som ritas omkring en punkt *O* som medelpunkt, kan därför vara hur ojämn som helst, blott varje radie råkar cirkeln i en och ej mer än en punkt.

I fråga om cirkelns godtycklighet för övrigt måste dock en inskränkning göras, i det att Eukl. I sats 1 (sid. 22) förutsätter, att två cirkellinjer, som ligga delvis inom och delvis utom varandra, måste skära varandra, d. v. s. hava någon punkt gemensam. Detta uttryckes därmed, att cirkellinjen måste vara en *kontinuerlig* linje. I Eukl. I sats 2 göres samma förutsättning angående den rätta linjen.

Granskar man Eukl. I sats 1 litet närmare, finner man, att den innehåller ännu ett antagande. Ritats de båda cirkelarna på det nämnda godtyckliga sättet (jfr fig. 17 s. 22), så finner man även nu (enl. I def. 15), att $AC=AB$ och $BC=BA$. Härav följer alldeles icke, att CB är $=CA$. Ty ritas man omkring *C* som medelpunkt en cirkel, som går genom *B*, så kan man, enligt vad förut sagts för övrigt, rita denna hur ojämn som helst, och således behöver den inte gå genom *A*. Då nu detta erfordras i satsen, så måste axiomen kompletteras med ett häremot svarande axiom,