som kan uppfattas som en kompletterande definition på likhet och uttryckas sålunda:

Def. 4. Eukl. ax. 1 gäller för sträckor.

Med användning av Eukl. ax. 3 bevisas sedan sats 2, vars innebörd är att bestämma vad som menas med att *två räta linjer, som icke ha någon punkt gemensam,* äro lika långa. Innebörden av Eukl. ax. 3 är i detta fall den, att de delar av radierna, som befinna sig mellan två koncentriska cirkellinjer, skola betraktas som lika stora.

För övrigt kunna de räta linjerna utgöras av nästan vilka kroklinjer som helst, blott villkoret i Eukl. ax. 10 alltid är uppfyllt.

Lika litet som i fråga om räta linjer kan man i fråga om vinklar på ett entydigt sätt definiera vad som menas med, att två vinklar, som ej ligga så, att den ena helt och hållet täckes av den andra, äro lika stora. Man kan därför betrakta två sådana vinklar vilka som helst som lika stora, om detta ej strider mot andra antaganden i figuren.

På samma sätt kan snart sagt vilken yta som helst betraktas som en yta av konstant krökning. Man har endast att införa förflyttningsaxiomet under form av det första kongruensfallet. Härigenom inskränkes godtyckligheten i fråga om lika stora vinklar enligt följande definition:

Def. 5. En yta säges ha en konstant krökning, om första kongruensfallet betraktas såsom gällande för densamma. Detta innebär, att för en sådan yta gäller följande sats:

Om två sidor i en triangel äro lika med var sin sida i en annan triangel och de mellanliggande vinklarna betraktas som lika stora, så skola även de mot lika stora sidor stående vinklarna samt trianglarnas ytor betraktas som lika stora.

Anm. Man kan sedan lätt bevisa (indirekt), att de återstående sidorna måste betraktas som lika stora.

Allteftersom man betraktar vinkelsumman i en enda triangel såsom $\gtreqless 2R$, så kommer ytan att betraktas såsom

tillhörande den sfäriska, plana eller psevdosfäriska typen resp. I första fallet får ytan dock icke betraktas såsom oändligt utsträckt.

Vi hava således kommit till det resultatet att, rent geometriskt sett, »planet» kan vara en hur buktig yta som helst, »den räta linjen» hur krokig som helst och dessutom kunna vilka räta linjer (som råkas i ena ändpunkten) och vilka vinklar som helst anses vara »lika stora», blott de uppfylla vissa allmänna villkor: de Euklideiska satserna och bevisen bliva dock oförändrade.

Tillämpat på verkligheten skulle detta resultat innebära, att man icke har några rent geometriska metoder att visa upp, t. ex. om en kropp ändrar längd, när den flyttas. Men erfarenheten ger tvärtom vid handen, att vissa kroppar äro i det allra närmaste stela, d. v. s. oföränderliga till storlek och form. Huru skall denna erfarenhet ses i ljuset av det resultat vi kommit till?

I själva verket är inte godtyckligheten så stor, som den vid första påseendet förefaller. Om en figur innehåller endast några få räta linjer, så kunna de ritas ganska godtyckligt utan att skära varandra i mer än en punkt (jfr fig. 159). Om $\wedge u$ betraktas såsom $= \wedge v$, så kunna de »räta» linjerna A och B icke råka varandra, om C är en rät linje (I: 27). Ritar man nu sådana »räta» linjer ofantligt tätt mellan A och B, så kunna de ej råka varandra, men då kunna alla dessa ej ha samma form som A, utan att några måste råka B. Ju flera linjer som ritas, desto mindre blir alltså godtyckligheten.

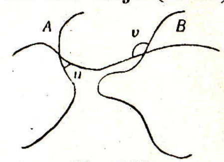

Fig. 159.

Verkligheten kan nu betraktas såsom uppfylld av geometriska figurer, vilka ligga oändligt tätt, och därför kan en kropps geometriska förändring vid en förflyttning försiggå endast på ett regelbundet sätt, så regelbundet till och med, att vi sakna medel att undersöka densamma. Ty de instrument vi använda måste ju själva ändras på samma regelbundna sätt.