Lite mer om svängningsrörelse

191004

Plan pendel

Svängningstiden för en plan, matematisk pendel (liten, liten kula i masslöst snöre som utför pendelrörelse utan luftmotstånd eller andra bromsande krafter i ett vertikalt plan) är för små utslag

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

där g är tyngdfaktorn och l är pendelns längd.

Vikt i fjäder

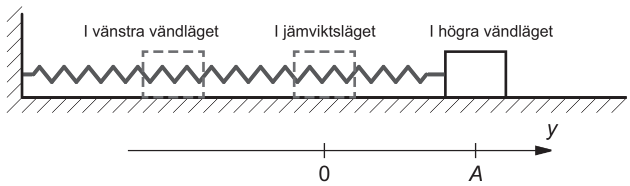
En vikt med massan m som hängs i en masslös fjäder med fjäderkonstant k och sätts i vertikal svängningsrörelse kommer att ha svängningstiden

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Det här sambandet gäller egentligen alla situationer där den återförande kraften, eller resultanten till de krafter som verkar på det svängande föremålet, är proportionell mot utslaget enligt $F = kx$ (eller $F_{\text{res}} = kx$).

Matematisk beskrivning av harmonisk svängningsrörelse

Vi betraktar en liten kloss med massan m som kan glida friktionsfritt fram och tillbaka längs en linje på ett horisontellt underlag. Klossen är fäst i en fjäder som kan tryckas ihop och dras ut. Fjädern följer Hookes lag och har fjäderkonstanten k.



För att beskriva klossens rörelse inför vi en lägeskoordinat-axel enligt figuren ovan. Koordinataxeln väljs så att klossens läge är $y = 0$ då den befinner sig i jämviktsläget. Om klossen sedan dras ut till $y = A$ (visas i figuren) och släpps kommer den att röra sig fram och tillbaka i en svängningsrörelse med amplituden A. Läget vid tidpunkten t (vi startar klockan när klossen första gången far förbi jämviktsläget åt höger i figuren) ges av

$$y = A\sin\omega t,$$

där ω är en konstant som ges av

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{1}$$

Denna konstant (ω) kallas ibland vinkelhastighet.[1] Svängningstiden (perioden) är

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

[1]Man brukar här prata om konstanten ω som "vinkelhastigheten”, även om det inte är fråga om någon cirkelrörelse. Sambandet mellan konstanten ω i (1) och svängningstiden T är nämligen precis detsamma som mellan vinkelhastighet och omloppstid T vid cirkelrörelse ($\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$).

Klossens hastighet ges av[2]

$$v = \omega A \cos \omega t.$$

Notera att detta innebär att klossens största fart är $v_{\max} = \omega A$ (när den far förbi jämviktsläget).

Klossens acceleration ges av[3]

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t.$$

Det svängande systemets totala energi är summan av klossens rörelseenergi och den elastiska energin i fjädern:

$$\begin{aligned}
W = \frac{ky^2}{2} + \frac{mv^2}{2} &= \frac{1}{2}(kA^2 \sin^2 \omega t + m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t) \\
&= \frac{1}{2}(kA^2 \sin^2 \omega t + m\frac{k}{m}A^2 \cos^2 \omega t) \\
&= \frac{1}{2}kA^2.
\end{aligned}$$

Notera hur trigonometriska ettan kom till användning i sista steget! Löser vi ut k ur sambandet (1) ser vi att energin också kan skrivas

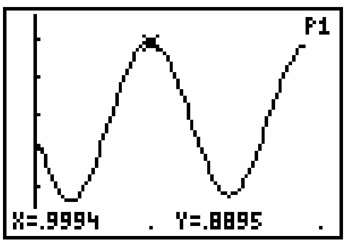
$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

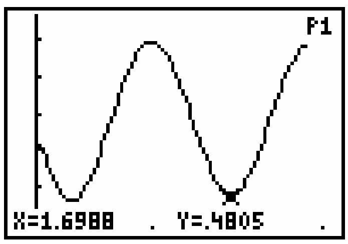
Även om vi började diskussionen med horisontell svängningsrörelse är det så att det vi gjort också kan användas vid vertikal svängningsrörelse.[4] Det väsentliga är att det svängande föremålet påverkas av en eller flera krafter vars resultant är proportionell mot utslaget och riktad tillbaka mot jämviktsläget ($F_{\text{res}} = -ky$).

En övningsuppgift[5]

Uppgift nr 9 (1325)
2/0 , 0/2

I bilderna finns illustrerat lägeskoordinaten som funktion av tiden för en boll som hängande i en fjäder utför en harmonisk svängningsrörelse. Sträckan är y meter och tiden är x sekunder.





a) Bestäm rörelsens amplitud och periodtid.

b) Beräkna även den maximala farten som bollen har under rörelsen.

---

[2]Fås genom derivering av lägesfunktionen med avseende på tiden.

[3]Fås genom derivering av hastighetsfunktionen med avseende på tiden.

[4]Man får dock vara lite försiktig vid energiberäkningar eftersom viktens gravitationsenergi då inte är konstant. Här finns lite detaljer som vi inte tar nu.

[5]Från kursprov Fysik B 2002.