1138

Inte så bra uppgift tycker jag!

(Bättre att läsa det viktiga beviset (dock över-över-kurs) Men se nästa sida om du är nyfiken)

Men så här kan man resonera:

1) Antag att 2, 3, 5 och 7 är de enda primtalen som finns.

2) Bilda ett nytt tal $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$

3) Eftersom n inte är lika med 2, 3, 5 eller 7 är det inte ett primtal.

Då är det ett sammansatt tal.

4) Men om n är sammansatt måste det vara delbart med 2, 3, 5 eller 7.

5) Det är det inte (vi får resten 1 vid division med 2, 3, 5 eller 7).

6) Då måste vårt antagande i 1) vara fel.

7) Det finns alltså fler primtal än 2, 3, 5 och 7!

DETTA INGÅR INTE I Ma 1c-KURSEN!

(Från Vretblad & Ekstig, Algebra och geometri, Gleerups, 2006)

Euklides bevis som nämns i uppgift 1138:

Sats 2.19 *Det finns oändligt många primtal.*

Bevis. Antag att det bara funnes ändligt många primtal. I så fall skulle vi kunna skriva upp dem allihop och kalla dem för $p_1, p_2, \ldots, p_N$, låt oss säga. Sedan bildar vi talet

$$q = p_1 p_2 p_3 \cdots p_N + 1.$$

Vi vet att detta tal inte är ett primtal, ty det är ju inte lika med något av $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Men då måste det vara delbart med något av dessa. Men vad händer om vi försöker utföra en sådan division? Dividerar vi med p_k får vi

$$q = A_k p_k + 1,$$

där A_k är produkten av alla primtalen utom just p_k. Det betyder att divisionen med p_k ger resten 1, dvs. q är inte delbart med p_k. Och det går lika illa för alla p_k. Här har vi en motsägelse – antagandet om ändligt många primtal måste vara felaktigt. Satsens påstående måste alltså vara sant. □

Idén med motsägelsebevis är att om vi ska visa A så antar vi först att A inte är sant, och visar sedan att detta leder till en motsägelse. Då måste vårt antagande varit fel, dvs A är sant