NP Ma 3b ht 2012

25

Detta är en långsökt och inte särskilt bra uppgift tycker jag!

Vi skall jämföra summan

$$S = 100 \cdot 1^2 + 100 \cdot 2^2 + 100 \cdot 3^2 + 100 \cdot 4^2 + 100 \cdot 5^2 + 100 \cdot 6^2 \qquad \left(= \sum_{i=1}^{6} 100 x_i^2 \right)$$

Pengarna han får när han fyller bår ska räknas med.

och integralen

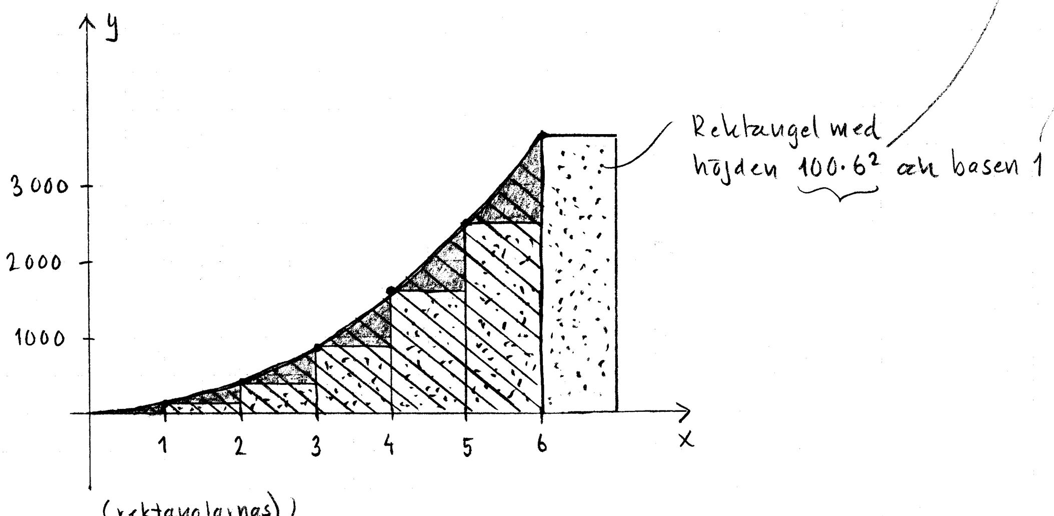
$$I = \int_0^6 100x^2 \, dx .$$

Om vi skriver summan som

$$\left(= \sum_{i=1}^{6} 100 x_i \, \Delta x, \text{ där } \Delta x = 1 \right)$$

$$S = \underbrace{100 \cdot 1^2} \cdot 1 + \underbrace{100 \cdot 2^2} \cdot 1 + \underbrace{100 \cdot 3^2} \cdot 1 + \underbrace{100 \cdot 4^2} \cdot 1 + \underbrace{100 \cdot 5^2} \cdot 1 + \underbrace{100 \cdot 6^2} \cdot 1$$

ser vi att denna summa kan åskådliggöras grafiskt:



Staplarnas (rektanglarnas) sammanlagda area är lika med summan S.

Integralens värde är lika med arean av det streckade området mellan kurvan $y = 100x^2$ och x-axeln.

Eftersom det prickade områdets area är större än det streckade områdets area måste $S > I$.

(de skuggade områdena har ju mindre sammanlagd area än den sista rektangeln.)

Som sagt, en långsökt uppgift!