2214 (a) Bestäm $f'(3)$ om $f(x) = 0{,}8x^2$

Derivatans definition:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\text{differenskvot}}$$

Lösning:

Börja med att ställa upp och förenkla differenskvoten.

1) Differenskvoten ($a = 3$, $f(x) = 0{,}8x^2$)

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{0{,}8(3+h)^2 - 0{,}8 \cdot 3^2}{h}$$

$$= \frac{0{,}8(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot h + h^2) - 0{,}8 \cdot 3^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{0{,}8 \cdot 3^2} + 0{,}8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h + 0{,}8h^2 - \cancel{0{,}8 \cdot 3^2}}{h}$$

$$= \frac{4{,}8h + 0{,}8h^2}{h} = \frac{h(4{,}8 + 0{,}8h)}{h} = 4{,}8 + 0{,}8h$$

Derivatavärdet kan sedan bestämmas (= gränsvärdet av differenskvoten då h går mot noll.

2) Derivatans värde då $x = 3$:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} (4{,}8 + 0{,}8h) = 4{,}8$$

Svar: $f'(3) = 4{,}8$

Man kan också redovisa så här:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0{,}8(3+h)^2 - 0{,}8 \cdot 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0{,}8(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot h + h^2) - 0{,}8 \cdot 3^2}{h}$$

Observera att "$\lim_{h \to 0}$" måste skrivas ut i varje fram till dess att gränsvärdet beräknas

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{0{,}8 \cdot 3^2} + 0{,}8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h + 0{,}8h^2 - \cancel{0{,}8 \cdot 3^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}8h + 0{,}8h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4{,}8 + 0{,}8h) = 4{,}8$$