NP Ma 4 vt 2013

Om $p(2i)=0$ och $p(-2i)=0$ innehåller $p(z)$ faktorerna $(z-2i)$ och $(z-(-2i))=(z+2i)$ och därmed också $(z-2i)(z+2i)=(z^2+4)$

13

$$p(z)=z^5+4z^3-2z^2-8$$

Skulle också kunna använda faktorsatsen, men vi behöver ändå göra divisionen i (b)-uppgiften

(a) (z^2+4) är en faktor i $p(z)$ om $p(z)$ är delbart med (z^2+4)

Vi utför divisionen:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
z^3 & & & & -2 & & \\
\hline
z^5 & +0z^4 & +4z^3 & -2z^2 & +0z^1 & -8 & \big|\; z^2+4 \\
-(z^5 & & +4z^3) & & & & \\
\hline
 & & 0 & -2z^2 & & & \\
 & & -(& -2z^2 & & -8) & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Alltså. $p(z)=(z^2+4)(z^3-2)$

(b) $\underbrace{z^5+4z^3-2z^2-8}_{p(z)}=0 \qquad (*)$

I (a)-uppgiften har vi sett att $p(z)=(z^2+4)(z^3-2)$. Ekv. $(*)$ kan alltså skrivas

$(z^2+4)(z^3-2)=0$

$z^2+4=0$ eller $z^3-2=0$

$z=\pm 2i \qquad z^3=2 \qquad (**)$

Ansätt $z=r(\cos v+i\sin v)$ och använd att $2=2(\cos 0°+i\sin 0°)$. Ekv $(**)$ kan då skrivas

$r^3(\cos v+i\sin v)^3=2(\cos 0°+i\sin 0°)$

de Moivres formel $\rightarrow$ $r^3(\cos 3v+i\sin 3v)=2(\cos 0°+i\sin 0°)$

Två komplexa tal är lika om 1) beloppen är lika och 2) argumenten är lika sånär som på $n\cdot 2\pi$

13

(forts)

Vi får alltså

$r^3 = 2$ och $3v = 0° + n\,2\pi$

$r = 2^{\frac{1}{3}}$ $\quad v = n \cdot \frac{2\pi}{3}$

Vi skriver ut rötterna:

$n = 0:$ $(v = 0)$ $z_1 = 2^{\frac{1}{3}}$

$n = 1:$ $\left(v = \frac{2\pi}{3}\right)$ $z_2 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$n = 2$ $\left(v = \frac{4\pi}{3}\right)$ $z_3 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

Svar: $z_1 = 2^{\frac{1}{3}}$, $z_2 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_3 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

$z_4 = 2i$, $z_5 = -2i$