

4312

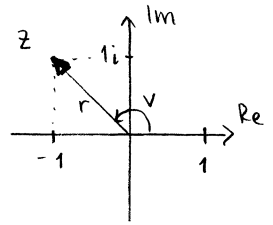
(a) $z = -1 + i$

Gå över till polär form: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Ur figuren ser vi direkt att

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

(90° + 45°)



Alltså:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

Då får vi

$$z^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^n \stackrel{\text{de Moivre's formel}}{=} (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n \cdot 3\pi}{4} + i \sin \frac{n \cdot 3\pi}{4} \right)$$

Nu ser vi att z^n reellt om (och endast om)

$$\sin \frac{n \cdot 3\pi}{4} = 0 \quad (*)$$

Ett komplext tal är reellt om imaginärdelen = 0

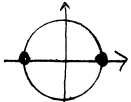
Se uppgift 1411 (b):

$\sin \varphi = 0$

$\varphi = 0 + n \cdot 2\pi$

eller

$\varphi = \pi - 0 + n \cdot 2\pi$



Dessa lösningar kan sammanfattas i

$\varphi = n\pi, n \text{ heltal}$

Nu kommer vi ihåg att ekvationen $\sin \varphi = 0$ har lösningarsom kan sammanfattas i $\varphi = k\pi$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Då ser vi att (*) ger

$$\frac{n \cdot 3\pi}{4} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\frac{3n}{4} = k, \quad k \text{ heltal}$$

Vi ska alltså hitta det minsta (positiva) tal n sådant att $\frac{3n}{4}$ blir ett heltal. Det talet är $n = 4$

Ser man inte direkt kan man pröva sig fram.

Svar: $n = 4$