

4314

Sätt $z = \cos v + i \sin v$. Då får vi med hjälp av de Moivre's formel

(c) (d)

$$z^5 = \cos 5v + i \sin 5v \quad (*)$$

Vi kan också beräkna z^5 den långa vägen. Om vi utnyttjar att (se nästa sida)

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

så får vi

$$\begin{aligned} z^5 &= (\cos v + i \sin v)^5 = \cos^5 v + 5 \cos^4 v \cdot i \cdot \sin v + 10 \cos^3 v \cdot i^2 \cdot \sin^2 v \\ &\quad + 10 \cos^2 v \cdot i^3 \cdot \sin^3 v + 5 \cos v \cdot i^4 \cdot \sin^4 v + i^5 \cdot \sin^5 v \\ &= \cos^5 v + \underline{5i \cos^4 v \sin v} - 10 \cos^3 v \cdot \sin^2 v \\ &\quad - \underline{10i \cos^2 v \cdot \sin^3 v} + 5 \cos v \cdot \sin^4 v + \underline{i \sin^5 v} \\ &= (\cos^5 v - 10 \cos^3 v \cdot \sin^2 v + 5 \cos v \sin^4 v) \\ &\quad + i(5 \cos^4 v \sin v - 10 \cos^2 v \sin^3 v + \sin^5 v) \end{aligned} \quad (**)$$

Jämför vi nu realdelar och imaginärdelar i (*) och (**) får vi

$$\begin{aligned} \cos 5v &= \cos^5 v - 10 \cos^3 v \cdot \sin^2 v + 5 \cos v \cdot \sin^4 v \\ &= \cos^5 v - 10 \cos^3 v (1 - \cos^2 v) + 5 \cos v (1 - \cos^2 v)^2 \\ &= \cos^5 v - 10 \cos^3 v + 10 \cos^5 v + 5 \cos v (1 - 2 \cos^2 v + \cos^4 v) \\ &= \underline{\cos^5 v} - \underline{10 \cos^3 v} + \underline{10 \cos^5 v} + 5 \cos v - \underline{10 \cos^3 v} + \underline{5 \cos^5 v} \\ &= 16 \cos^5 v - 20 \cos^3 v + 5 \cos v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 v + \cos^2 v &= 1 \\ \Rightarrow \sin^2 v &= 1 - \cos^2 v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 v + \cos^2 v &= 1 \\ \Rightarrow \cos^2 v &= 1 - \sin^2 v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 5v &= 5 \cos^4 v \sin v - 10 \cos^2 v \sin^3 v + \sin^5 v \\ &= 5 (1 - \sin^2 v)^2 \sin v - 10 (1 - \sin^2 v) \sin^3 v + \sin^5 v \\ &= 5 (1 - 2 \sin^2 v + \sin^4 v) \sin v - 10 \sin^3 v + 10 \sin^5 v + \sin^5 v \\ &= 5 \sin v - \underline{10 \sin^3 v} + \underline{5 \sin^5 v} - \underline{10 \sin^3 v} + \underline{10 \sin^5 v} + \underline{\sin^5 v} \\ &= 16 \sin^5 v - 20 \sin^3 v + 5 \sin v \end{aligned}$$

4314

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(c) (d)

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(f) (s)

$$(a+b)^4 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = a^4 + \underline{3a^3b} + \underline{3a^2b^2} + \underline{ab^3}$$

$$+ \underline{a^3b} + \underline{3a^2b^2} + \underline{3ab^3} + b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$$

$$= a^5 + \underline{4a^4b} + \underline{6a^3b^2} + \underline{4a^2b^3} + \underline{ab^4}$$

$$+ \underline{a^4b} + \underline{4a^3b^2} + \underline{6a^2b^3} + \underline{4ab^4} + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$