2302

Visa att
$$\boxed{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}} \quad (*)$$
för $n=1,2,3,\ldots$

1) För $n=1$ får vi $VL=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$ och $HL=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Påståendet $(*)$ är alltså sant för $n=1$.

2) Antag att påståendet $(*)$ är sant för $n=p$. Då gäller

induktionsantagandet

$$VL_p=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{p(p+1)}=\frac{p}{p+1}=HL_p \qquad (IA)$$

Vi ska nu visa att $VL_{p+1}=HL_{p+1}$, dvs att $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(p+1)(p+2)}=\frac{p+1}{p+2}$

I så fall får vi

$$VL_{p+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(p+1)(p+1+1)}$$

$$=VL_p+\frac{1}{(p+1)(p+2)}\overset{IA}{=}HL_p+\frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$=\frac{p}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}=\frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$=\frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)}=\frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)}=\frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)}=\frac{p+1}{p+2}$$

$$HL_{p+1}=\frac{p+1}{p+1+1}=\frac{p+1}{p+2}$$

$$VL_{p+1}=HL_{p+1}$$

Om påståendet $(*)$ är sant för $n=p$ är det alltså sant för $n=p+1$.

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen är påståendet $(*)$ sant för alla heltal $n\geq 1$ □