2316

Visa att $\boxed{y = x^n \text{ har derivatan } y' = nx^{n-1}}^{(*)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

1) För $n = 1$ får vi $y = x^1$ och $y' = 1 \cdot x^{1-0} = 1$.

Påståendet $(*)$ är alltså sant för $n = 1$.

För att kunna säga detta borde vi visa att $y' = 1$ med hjälp av derivatans definition. Se nedan.

2) Antag att påståendet är sant för $n = p$. Då gäller

$y = x^p$ har derivatan $y' = px^{p-1}$ (IA)

induktionsantagandet

Vi ska nu visa att $y = x^{p+1}$ har derivatan $y' = (p+1)x^p$

$$y = x^{p+1} = x \cdot x^p$$

Produktregeln ger nu

Produktregeln får anses vara känd och bevisad

Kan göras med hjälp av derivatans definition

$$y' = 1 \cdot x^p + x \cdot \underbrace{px^{p-1}}_{\text{IA}} = x^p + px^p = (p+1)x^p$$

Om påståendet $(*)$ är sant för $n = p$ är det alltså sant för $n = p + 1$.

3) Till följd av 1), 2) och induktionsprincipen är påståendet $(*)$ sant för alla heltal $n \geq 1$. □

För fullständighets skull visar vi att $\overset{f(x)=x}{y = x}$ har derivatan $y' = 1$ med hjälp av derivatans definition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{x + h - x}{h}}_{1} = 1$$

$y = x$ har alltså derivatan $y' = 1$.