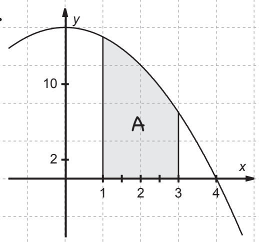
Övningsblad

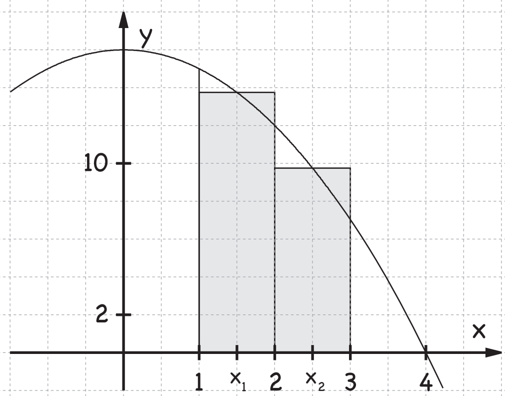
Integraler

Namn: ____________

Vi vill bestämma arean A under en kurva $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$.
Vi tittar först på specialfallet $f(x) = 16 - x^2$, $a = 1$, $b = 3$ och gör ungefärliga beräkningar genom att approximera området med ett antal rektanglar, alla med samma bredd.



1



2 st rektanglar:

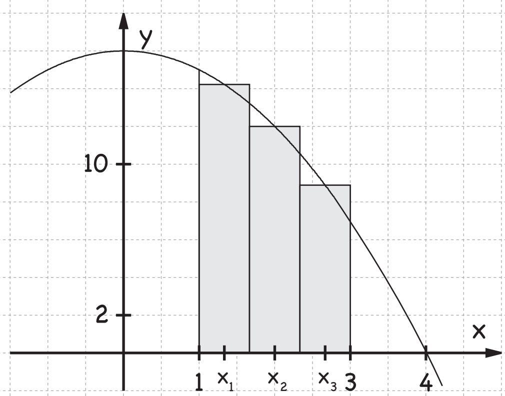
$\Delta x = \dfrac{3-1}{2} =$

$x_1 =$ $\qquad$ $f(x_1) =$

$x_2 =$ $\qquad$ $f(x_2) =$

$A_2 \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x =$

2



3 st rektanglar:

$\Delta x = \dfrac{3-1}{3} \approx$

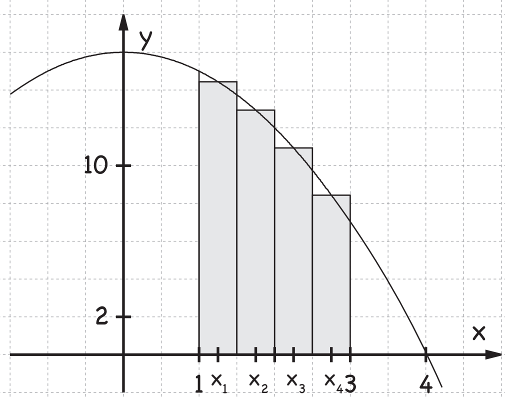
$x_1 \approx$ $\qquad$ $f(x_1) \approx$

$x_2 =$ $\qquad$ $f(x_2) =$

$x_3 \approx$ $\qquad$ $f(x_3) \approx$

$A_3 \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x \approx$

3



4 st rektanglar:

$\Delta x = \dfrac{3-1}{4} =$

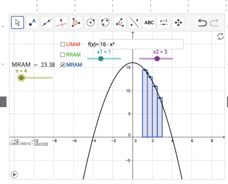
$x_1 =$ $\qquad$ $f(x_1) =$

$x_2 =$ $\qquad$ $f(x_2) =$

$x_3 =$ $\qquad$ $f(x_3) =$

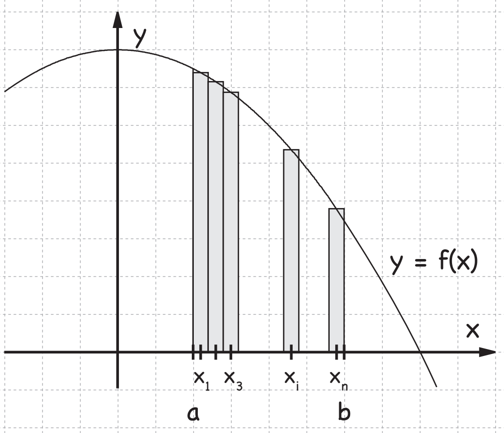
$x_4 =$ $\qquad$ $f(x_4) =$

$A_4 \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x =$



Integraler

Nu går vi över till ett allmänt resonemang.



n st rektanglar:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \ldots$$

$x_1 = \ldots$ $\quad f(x_1) = \ldots$

$x_2 = \ldots$ $\quad f(x_2) = \ldots$

$\ldots$ $\quad \ldots$

$$A_n \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_i)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Om vi nu låter $n \longrightarrow \infty$ (så att $\Delta x \longrightarrow 0$), borde $A_n \longrightarrow A$, där A är den sökta arean under kurvan.

Alltså:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \underset{\text{def.}}{=} \int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{återstår att visa}}{=} F(b) - F(a), \text{ där } F'(x) = f(x).$$

Varför är A = F(b) − F(a)?