

# 9 BRA SAKER

att kunna i Ma 3c-kursen

## OM GRÄNSVÄRDEN OCH KONTINUITET

12 september 2025

---

### Lite<sup>1</sup> om gränsvärden

§1 Om  $f(x)$  närmar sig ett tal  $A$  då  $x$  närmar sig ett tal  $a$  "från höger" säger vi att  $f$  har *högergränsvärdet*  $A$  då  $x$  går mot  $a$ . Detta kan skrivas  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$  eller  $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow a^+$ .

Till exempel har vi att  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 4) = 7$ , vilket vi kan sluta oss till från en tabell som denna:

$x$	$(x + 4)$
3,01	7,01
3,001	7,001
3,0001	7,0001
3,00001	7,00001

§2 Om  $f(x)$  närmar sig ett tal  $A$  då  $x$  närmar sig ett tal  $a$  "från vänster" säger vi att  $f$  har *vänstergränsvärdet*  $A$  då  $x$  går mot  $a$ . Detta kan skrivas  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$  eller  $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow a^-$ .

Till exempel har vi att  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 4) = 7$ , vilket vi kan sluta oss till från en tabell som denna:

$x$	$(x + 4)$
2,99	6,99
2,999	6,999
2,9999	6,9999
2,99999	6,99999

§3 Om en funktion  $f$ :s högergränsvärde och vänstergränsvärde i en punkt  $x = a$  existerar, och är lika, säger vi att *gränsvärdet*  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existerar.

Till exempel har vi att  $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 4) = 7$ , efter det vi har sett ovan i §1 och §2.

---

<sup>1</sup>Det finns mycket mer att säga om gränsvärden, om riktiga definitionen och hur man gör ordentliga gränsvärdesberäkningar, men vi kan inte gå för djupt i Ma 3c-kursen.

Den här typen av gränsvärden (där funktionsvärdet närmar sig ett tal  $A$  då variabeln  $x$  närmar sig en punkt  $x = a$ ) kan vi kalla gränsvärden av typ A.

§4 Om  $f(x)$  närmar sig ett tal  $L$  då  $x$  blir större och större säger vi att  $f$  har gränsvärdet  $L$  då  $x$  går mot  $\infty$  ("oändligheten"). Detta kan skrivas  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  eller  $f(x) \rightarrow L$  då  $x \rightarrow \infty$ .

Till exempel har vi att  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$ .

§5 Motsvarande gäller om  $x$  går mot negativa oändligheten ( $-\infty$ ). Då skriver vi  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  eller  $f(x) \rightarrow L$  då  $x \rightarrow -\infty$ .

Den här typen av gränsvärden (där funktionsvärdet närmar sig ett tal  $L$  då variabeln  $x$  växer mot allt större positiva eller negativa tal) kan vi kalla gränsvärden av typ B.

Både typ A- och typ B-gränsvärden kallas ibland *egentliga* gränsvärden. Det finns även *oegentliga* gränsvärden, men sådana återkommer vi till i Ma 4-kursen, i samband med asymptoter.

## Kontinuitet

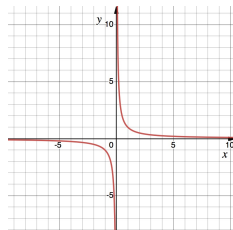
§6 Vi säger att en funktion  $f$  är *kontinuerlig i en punkt*  $x = c$  om  $c$  tillhör funktionens definitionsmängd och om gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existerar och är lika med  $f(c)$ .

§7 Vi säger att en funktion  $f$  är *kontinuerlig i ett intervall* om den är kontinuerlig i varje punkt i intervallet.

§8 Vi säger att en funktion  $f$  är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd.

§9 Om det går att rita en funktionsgraf "utan att lyfta pennan" är funktionen i allmänhet kontinuerlig.

Notera dock att exempelvis  $f(x) = 1/x$  faktiskt är kontinuerlig ( $x = 0$  ingår inte i definitionsmängden).



**Källor och vidareläsning:** Mycket av detta kommer från *Avancera I* av Henrik Petersson (Studentlitteratur, 2019).