Skissa grafen till

$$f(x) = -\frac{x^2}{x-2}$$

Lodräta asymptoter?

Kolla så att inte täljaren har samma nollställe(n) som nämnaren.

$f(x)$ är ej definierad då $x-2=0$

$$x=2.$$

Täljaren är inte 0 för $x=2$: $2^2=4\neq 0$

Alltså är $x=2$ lodrät asymptot

$x \to 2^-$: $f(x) = -\frac{x^2}{x-2} \to +\infty$ $\quad -\frac{1{,}99^2}{1{,}99-2} = -\frac{1{,}99^2}{-0{,}01} > 0$

$x \to 2^+$: $f(x) = -\frac{x^2}{x-2} \to -\infty$ $\quad -\frac{2{,}01^2}{2{,}01-2} = -\frac{2{,}01^2}{0{,}01} < 0$

Stora $|x|$?

Förläng med $\frac{1}{x}$

$x \to +\infty$: $f(x) = -\frac{x^2}{x-2} = -\frac{x}{1-\frac{2}{x}} \to -\infty$ då $x \to +\infty$

$x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$ då $x \to -\infty$

Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där täljarens grad är 1 större än nämnarens grad bör sned asymptot finnas. Vi återkommer till den

Skärningar med koordinataxlarna?

y-axeln? $f(0) = -\frac{0}{0-2} = 0$

x-axeln? $f(x)=0$ ger

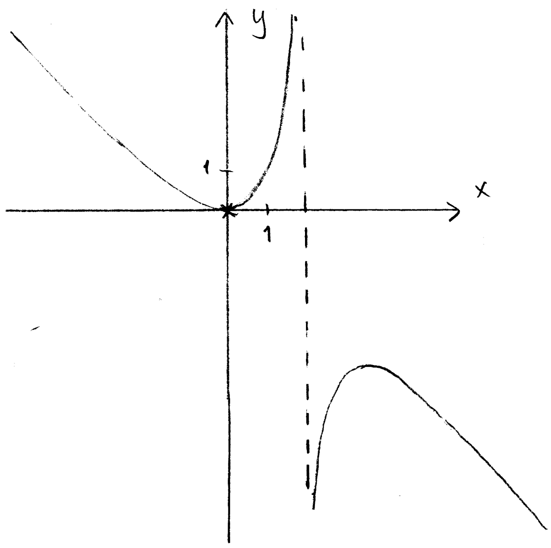
$$-\frac{x^2}{x-2} = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Grafen går alltså genom $(0,0)$.

Skiss av grafen



Utan att veta den sneda asymptoten är det svårt att vara noggrannare än så här.

Om man inte gör en värdetabell och prickar in punkter därifrån.

$y = kx + m$

Sned asymptot?

Variant 1 $\left(k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad m = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) \right)$

$x > 0$:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{x}{x-2} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{1 - \frac{2}{x}} \right) = -1$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{x^2}{x-2} - (-1 \cdot x) \right) = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-x^2 + x(x-2)}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-x^2 + x^2 - 2x}{x-2} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2x}{x-2} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2}{1 - \frac{2}{x}} \right) = -2$$

För $x > 0$ har vi alltså en asymptot $y = -x - 2$

$x < 0$:

Se beräkningar ovan

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{x^2}{x-2}}{x} = \ldots = \lim \left(-\frac{1}{1 - \frac{2}{x}} \right) = -1$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{x^2}{x-2} - (-1) \cdot x \right) = \ldots = \lim \left(\frac{-2}{1 - \frac{2}{x}} \right) = -2$$

Även för $x < 0$ har vi alltså en asymptot $y = -x - 2$

Variant 2 (omskrivning av funktionen med ett trick)

Vi vill få en faktor $(x-2)$ i täljaren. Addera och subtrahera därför 4 och använd sedan konjugatregeln "baklänges"

$$f(x) = -\frac{x^2}{x-2} = -\frac{x^2 - 4 + 4}{x-2} = -\frac{x^2 - 4}{x-2} - \frac{4}{x-2}$$

$$= -\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} - \frac{4}{x-2} = -(x+2) - \frac{4}{x-2} = -x - 2 - \frac{4}{x-2}$$

Av detta ser vi att $f(x) \approx -x - 2$ då $x \to \pm\infty$

Alltså har vi en sned asymptot $y = -x - 2$.

Kommer senare i Ma4-kursen!

Variant 3 (omskrivning av funktionen med polynomdivision)

$$\frac{x^2}{x-2} = ?$$

$$\begin{array}{rl}
 x + 2 & \\
\hline
x^2 + 0x + 0 & \big|\ x - 2 \\
-(x^2 - 2x) & \\
\hline
2x + 0 & \\
-(2x - 4) & \\
\hline
4 &
\end{array}$$

Alltså: $x^2 = (x-2)(x+2) + 4$

$$\frac{x^2}{(x-2)} = x + 2 + \frac{4}{(x-2)}$$

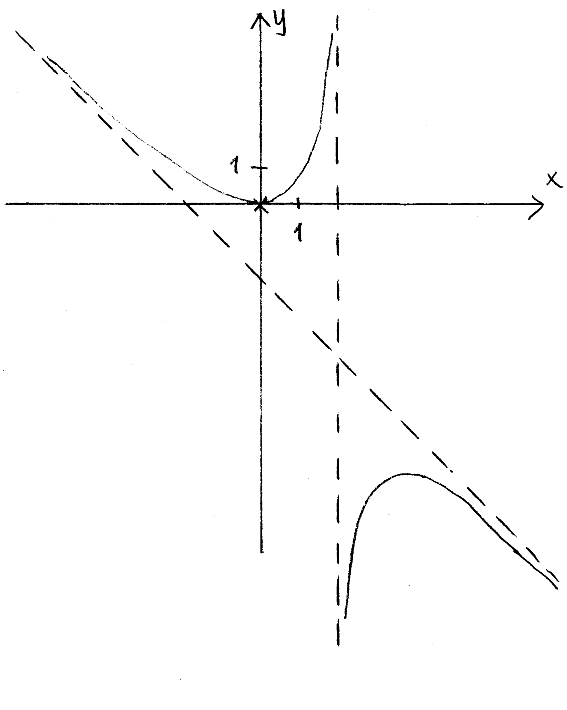
Då får vi:

$$f(x) = -\frac{x^2}{x-2} = -x - 2 - \frac{4}{x-2}$$

Av detta ser vi att $f(x) \approx -x - 2$ då $x \to \pm\infty$

Alltså har vi en sned asymptot $y = x - 2$

Skiss av grafen



Derivataundersökning

Derivatans nollställen?

$$f(x) = -\left(\frac{2x(x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2}\right) = -\left(\frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2}\right)$$

$$= \frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2}$$

$f(x) = 0$ ger

$$\frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2} = 0$$

$$-x^2 + 4x = 0$$

$$x(4-x) = 0$$

$x = 0$ eller $4 - x = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 4$

Teckentabell

x		$\boxed{0}$		2		$\boxed{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0 MIN	$\nearrow$	ej def	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

$$f'(-10) = \frac{-(-10)^2 + 4\cdot(-10)}{(-10-2)^2} < 0$$

$$f'(1) = \frac{-1^2 + 4\cdot 1}{(1-2)^2} > 0$$

$$f'(3) = \frac{-3^2 + 4\cdot 3}{(3-2)^2} > 0$$

$$f'(10) = \frac{-10^2 + 4\cdot 10}{(10-2)^2} < 0$$

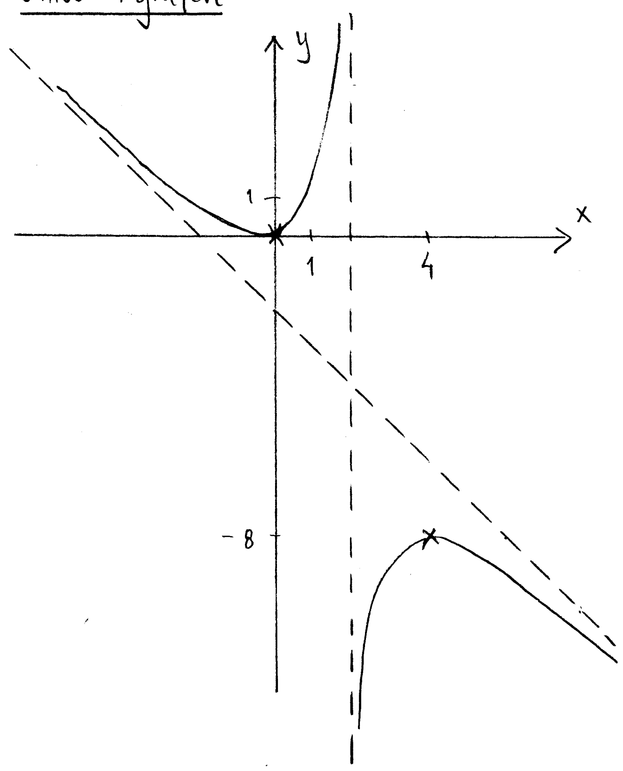
Intressanta funktionsvärden

$$f(0) = -\frac{0^2}{0-2} = 0$$

$$f(4) = -\frac{4^2}{4-2} = -\frac{16}{2} = -8$$

Funktionsgrafen har alltså en minimipunkt $(0,0)$ och en maximipunkt $(4,-8)$.

Skiss av grafen



Ännu lite bättre hade det blivit med en värdetabell där vi kollat funktionsvärden för t ex $x=-2, 1, 3$ och 5