

Ex 1 Bestäm samtliga asymptoter till

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$$

och skissa grafen

Lodräta asymptoter?

f ej definierad då $(x^2 - 2) = 0$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$$

Alltså är $x = -\sqrt{2}$ och $x = \sqrt{2}$ lodräta asymptoter

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow (-\sqrt{2})^-: f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow (-\sqrt{2})^+: f(x) \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

$$\frac{(-1,5)}{(-1,5)^2 - 2} < 0$$

$$\frac{(-1,3)}{(-1,3)^2 - 2} > 0$$

$$\frac{1,3}{1,3^2 - 2} < 0$$

$$\frac{1,5^2}{1,5^2 - 2} > 0$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow (\sqrt{2})^-: f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow (\sqrt{2})^+: f(x) \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

Stora $|x|$?

Förläng med $\frac{1}{x^2}$

$$x \rightarrow +\infty: f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2 - 2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x^2}} \rightarrow 0 \text{ ("ovanifrån")}$$

$$\frac{1}{1000} > \frac{1}{1000} \left(1 - \frac{2}{1000^2} \right)$$

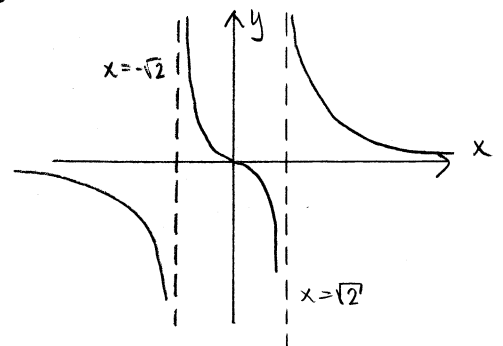
$$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 0 \text{ ("underifrån")}$$

Alltså är $y = 0$ (x-axeln) vågrät asymptot

S lutsats: Lodräta asymptoter

$$x = -\sqrt{2} \text{ och } x = \sqrt{2},$$

$$\text{vågrät asymptot } y = 0 \text{ (x-axeln)}$$



Ex 2: Bestäm samtliga asymptoter till

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

och skissa grafen

Lodrat asymptoter?

f ej definerad då $(x-2) = 0$

$$x = 2$$

Ett rationellt uttryck är inte definerat då nämnaren = 0

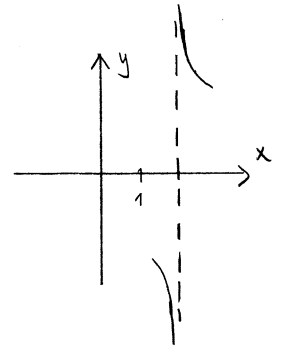
Alltså är $x=2$ lodrat asymptot

Vad händer då x närmar sig 2 från vänster resp. från höger?

$$\begin{cases} x \rightarrow 2^-: f(x) = \frac{x}{x-2} \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 2^+: f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\frac{1,99}{1,99-2} < 0$$

$$\frac{2,01}{2,01-2} > 0$$



Stora $|x|$?

Vad händer då x blir större och större?

$$x \rightarrow +\infty: f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x-2}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow 1$$

Förläng med $\frac{1}{x}$

("överkän")

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{1000}} > 1$$

Eftersom nämnaren är lite mindre än 1

$$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 1$$

("underkän")

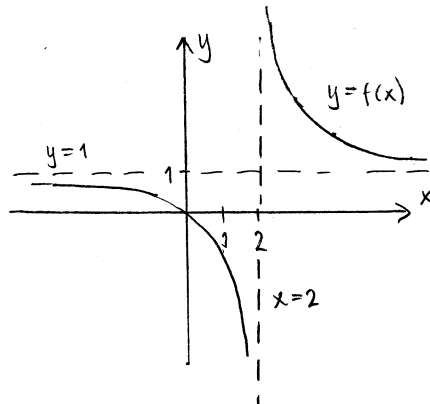
$$\frac{1}{1 - \frac{2}{(-1000)}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{1000}} < 1$$

Eftersom nämnaren är lite större än 1

Alltså är $y=1$ vågrät asymptot

Slutsats: Lodrat asymptot $x=2$, vågrät asymptot $y=1$

Skiss av grafen:



g kan också skrivas $g(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} = x + \frac{4}{x}$

Ex 3: Bestäm samtliga asymptoter till

$$g(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$$

och skissa grafen.

Lodräta asymptoter?

g ej definierad då $(x) = 0$

$$x = 0$$

Alltså är $x = 0$ (dvs y -axeln) lodrät asymptot

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow 0^-: g(x) = \frac{x^2 + 4}{x} \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 0^+: g(x) \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

$$\frac{(-0,01)^2 + 4}{-0,01} < 0$$

$$\frac{0,01^2 + 4}{0,01} > 0$$

Stora $|x|$?

$$x \rightarrow +\infty: g(x) = \frac{x^2 + 4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} = x + \frac{4}{x} \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty: g(x) \rightarrow -\infty$$

Vi ser att $g(x) \approx x$ då $x \rightarrow \pm\infty$

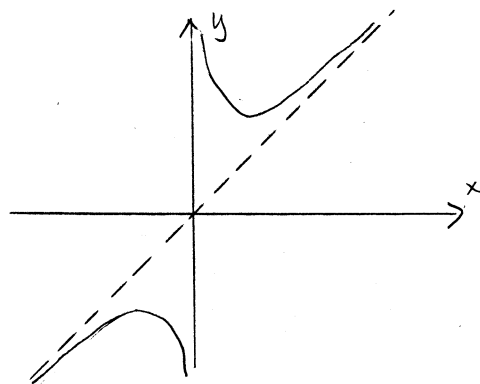
Alltså är $y = x$ sned asymptot

$$y = x = 1 \cdot x + 0$$

$\frac{4}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$, kvar blir x -termen

Slutsats: Lodrät asymptot $x = 0$, sned asymptot $y = x$.
(y -axeln)

Skiss av grafen:



(Här gissar jag bara var min- och max-punkterna är belägna. Skulle kunna pröva att undersöka med derivataundersökning för att veta på var de är belägna.)

Ex 4 Bestäm samtliga asymptoter till

$$g(x) = \frac{x^3 + 4}{x}$$

och skissa grafen.

Lodräta asymptoter?

[Se Ex 3]

Störa |x|?

$$x \rightarrow +\infty: g(x) = \frac{x^3 + 4}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{4}{x} = x^2 + \frac{4}{x} \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty: g(x) \rightarrow -\infty$$

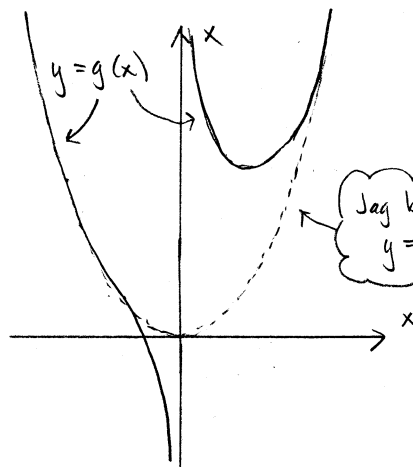
Vi ser att $g(x) \approx x^2$ då $x \rightarrow \pm\infty$

Alltså saknas sneda asymptoter.

Slutsats: Lodrät asymptot $x=0$, sned asymptot saknas
($y=mx+n$)

Skiss av grafen:

För stora |x| ska grafen bete sig som $y=x^2$



Jag började med att rita $y=x^2$ för att få lite hjälp vid skissandet av $y=g(x)$