

Skissa grafen till

$$f(x) = -\frac{x^2}{x-2}$$

Lodräkt asymptoter?

$f(x)$ är ej definierad då $x-2=0$

$$x = 2$$

Alltså är $x=2$ lodrät asymptot

$$x \rightarrow 2^-: f(x) = -\frac{x^2}{x-2} \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow 2^+: f(x) = -\frac{x^2}{x-2} \rightarrow -\infty$$

Kolla så att inte täljaren har samma nollställe(n) som nämnaren.

Täljaren är inte 0 för $x=2$:
 $2^2 = 4 \neq 0$

$$-\frac{1,99^2}{1,99-2} = -\frac{1,99^2}{-0,01} > 0$$

$$-\frac{2,01^2}{2,01-2} = -\frac{2,01^2}{0,01} < 0$$

Störa $|x|$?

Förång med $\frac{1}{x}$

$$x \rightarrow +\infty: f(x) = -\frac{x^2}{x-2} = -\frac{x}{1-\frac{2}{x}} \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow +\infty \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

Eftersom $f(x)$ är en rationell funktion där täljarens grad är 1 större än nämnarens grad bör sned asymptot kunna. Vi återkommer till den.

Skärningar med koordinataxlarna?

y-axeln? $f(0) = -\frac{0}{0-2} = 0$

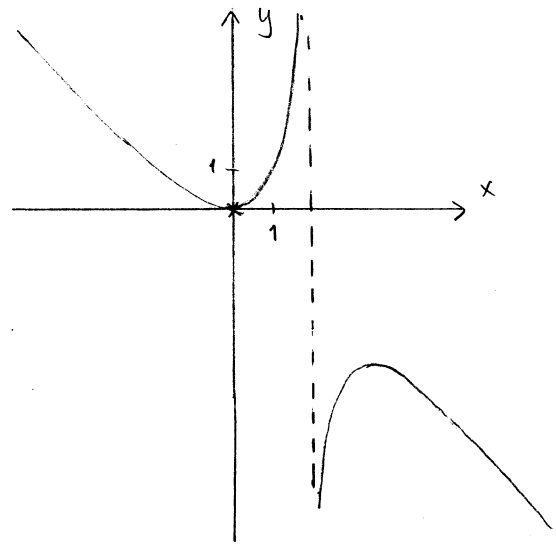
x-axeln? $f(x) = 0$ ger
$$-\frac{x^2}{x-2} = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Graten går alltså genom $(0, 0)$.

Skiss av graten



Utän att veta den sneda asymptoten är det svårt att vara noggrannare än så här.

Om man inte gör en värde tabell och prickar in punkter därifrån

$y = kx + m$

Sned asymptot?

Variant 1 ($k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$)

$x > 0$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-\frac{x^2}{x-2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1-\frac{2}{x}} \right) = -1$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{x-2} - (-1 \cdot x) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2 + x(x-2)}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2 + x^2 - 2x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{1-\frac{2}{x}} \right) = -2$$

För $x > 0$ har vi alltså en asymptot $y = -x - 2$

$x < 0$:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-\frac{x^2}{x-2}}{x} \right) = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{1-\frac{2}{x}} \right) = -1$$

Se beräkningar van

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^2}{x-2} - (-1) \cdot x \right) = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2}{1-\frac{2}{x}} \right) = -2$$

Även för $x < 0$ har vi alltså en asymptot $y = -x - 2$

Variant 2 (omskrivning av funktionen med ett trick)

$$f(x) = -\frac{x^2}{x-2} = -\frac{x^2 - 4 + 4}{x-2} = -\frac{x^2 - 4}{x-2} - \frac{4}{x-2}$$
$$= -\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} - \frac{4}{x-2} = -(x+2) - \frac{4}{x-2} = -x - 2 - \frac{4}{x-2}$$

Vi vill få en faktor $(x-2)$ i täljaren. Addera och subtrahera där för 4 och använd sedan konjugatregeln "baklänges"

Av detta ser vi att $f(x) \approx -x - 2$ då $x \rightarrow \pm\infty$ (eftersom $\frac{4}{x-2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$)

Alltså har vi en sned asymptot $y = -x - 2$.

Kommer senare i Ma4-kursen!

Variant 3 (omskrivning av funktionen med polynomdivision)

$$\begin{array}{r}
 x + 2 \\
 \hline
 x^2 + 0x + 0 \\
 -(x^2 - 2x) \\
 \hline
 2x + 0 \\
 -(2x - 4) \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \quad \boxed{x-2}$$

$$\frac{x^2}{x-2} = ?$$

Alltså: $x^2 = (x-2)(x+2) + 4$

$$\frac{x^2}{(x-2)} = x+2 + \frac{4}{(x-2)}$$

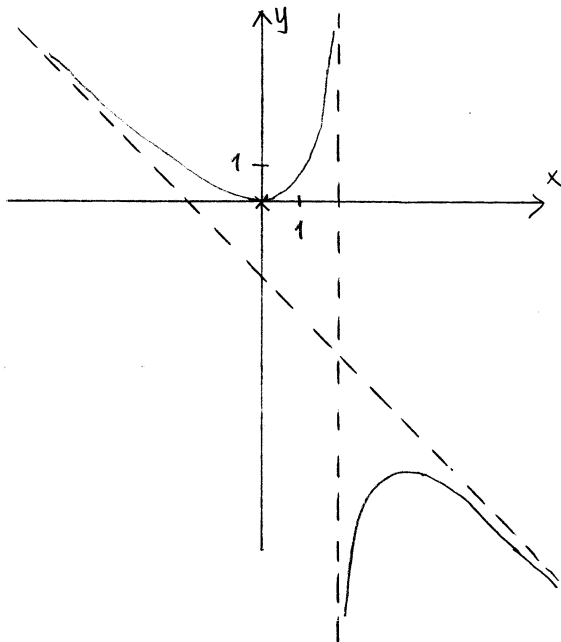
Då får vi:

$$f(x) = -\frac{x^2}{x-2} = -x-2 - \frac{4}{x-2}$$

Av detta ser vi att $f(x) \approx -x-2$ då $x \rightarrow \pm\infty$ (eftersom $\frac{4}{x-2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$)

Alltså har vi en sned asymptot $y = -x-2$

Skiss av grafen



Derivataundersökning

Derivatans nollställen?

$$f(x) = - \left(\frac{2x(x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} \right) = - \left(\frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} \right)$$

$$= \frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2}$$

f(x) = 0 ger

$$\frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2} = 0$$

-x^2 + 4x = 0

x(4-x) = 0

x = 0 eller 4-x = 0

x₁ = 0 x₂ = 4

Teckentabell

x		<u>0</u>		2		<u>4</u>		
f'(x)		-	0	+	ej def	+	0	-
f(x)		↘	0	↗	ej def	↗		↘
			MIN			MAX		

Intressanta funktionsvärden

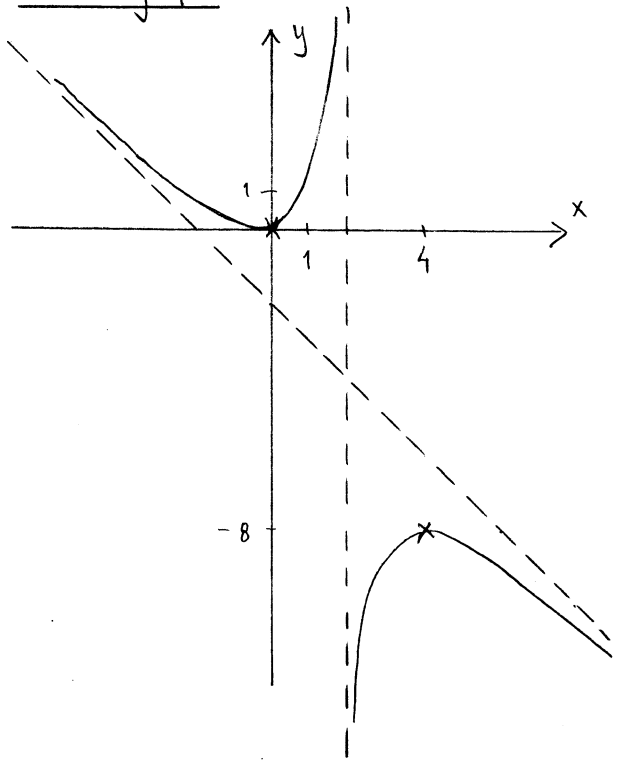
$$f(0) = - \frac{0^2}{0-2} = 0$$

$$f(4) = - \frac{4^2}{4-2} = - \frac{16}{2} = -8$$

$f'(-10) = \frac{-(-10)^2 + 4 \cdot (-10)}{(-10-2)^2} < 0$
 $f'(1) = \frac{-1^2 + 4 \cdot 1}{(1-2)^2} > 0$
 $f'(3) = \frac{-3^2 + 4 \cdot 3}{(3-2)^2} > 0$
 $f'(10) = \frac{-10^2 + 4 \cdot 10}{(10-2)^2} < 0$

Funktionsgrafen har alltså en minimipunkt (0, 0) och en maximipunkt (4, -8).

Skiss av grafen



Ännu lite bättre hade det blivit med en värde tabell där vi kallat funktionsvärden för $x = -2, 1, 3$ och 5