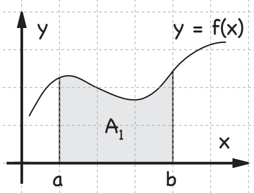
Saker vi kan göra med integraler

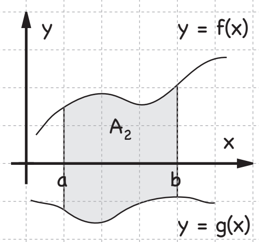
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ där } F'(x) = f(x) \qquad (*)$$

Med integraler kan vi ...

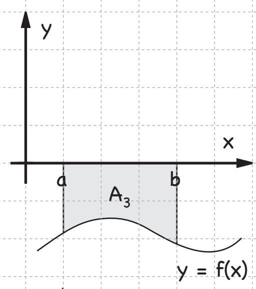
1) beräkna areor:



$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$



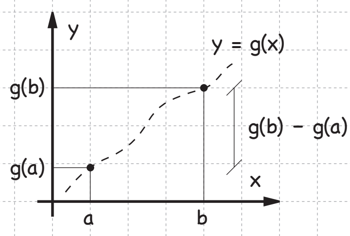
$$A_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



$$A_3 = \int_a^b [0 - f(x)]\,dx$$

2) beräkna förändringar om derivatan (förändringshastigheten) är känd:

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(x)\,dx$$



Motivering: (*) ger $\underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{förändringen av } F} = \underbrace{\int_a^b F'(x)\,dx}_{\text{integralen av } F'}$

Uppgifter där detta kan användas kan också lösas genom att bestämma rätt primitiv funktion till $g'(x)$.

3) summera oändligt många oändligt små bidrag:

Ex 1 Föremål rör sig med hastigheten $v(t) = 9{,}8t$. Hur långt rör sig föremålet under de tre första sekunderna?

Liten förflyttning under ett litet tidsintervall

$$\Delta s = v(t) \cdot \Delta t = 9{,}8t \cdot \Delta t$$

Hela förflyttningen

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_0^3 9{,}8t\,dt = \ldots \approx 44$$

$$f' = \frac{df}{dx} \quad \longrightarrow$$

F	f	f′	f″
	s	s′	s″
		v	v′
			a
	N	N′	

$$\longleftarrow \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

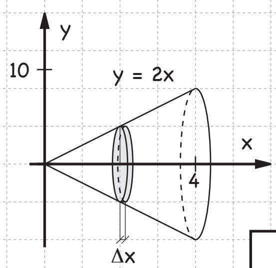
Ex 2 Linjen $y = 2x$, x-axeln och linjen $x = 4$ begränsar ett område som får rotera kring x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym.

Volymen av en tunn skiva

$$\Delta V = \pi y^2 \cdot \Delta x = \pi(2x)^2 \cdot \Delta x = 4\pi x^2 \cdot \Delta x$$

Hela volymen

$$V = \int_0^4 4\pi x^2\,dx = \ldots = \frac{256\pi}{3}$$



$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$