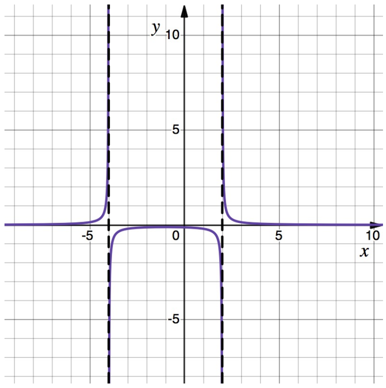
Lite mer om asymptoter

§1 En linje $x = d$ kallas för en *lodrät asymptot* (eller *vertikal asymptot*) till grafen till en funktion f då antingen $\lim_{x \to d^+} f(x) = \pm\infty$ eller $\lim_{x \to d^-} f(x) = \pm\infty$.

Till exempel har $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+4)}$ två lodräta asymptoter, nämligerna linjerna $x = 2$ och $x = -4$.



§2 En linje $y = kx + m$ kallas för en *sned asymptot* (eller *icke-vertikal asymptot*) till grafen till en funktion f då antingen

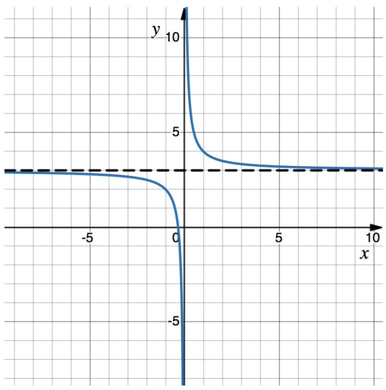
$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$$

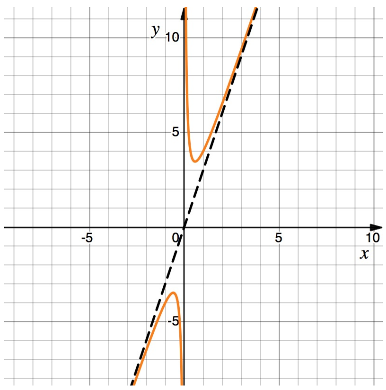
eller

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0.$$

Om $k = 0$ har f en *vågrät asymptot*, $y = m$. En vågrät asymptot är ett specialfall av en sned asymptot.

Till exempel har $f(x) = \frac{1+3x}{x}$ en vågrät asymptot, $y = 3$ (se nedan till vänster). Funktionen $f(x) = \frac{1}{x} + 3x$ har en sned asymptot, $y = 3x$ (se nedan till höger).





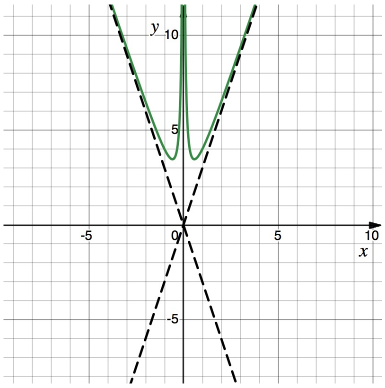
Så här kan k och m bestämmas:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

och motsvarande för $-\infty$.

§3 En funktion kan som mest ha två sneda asymptoter, men hur många lodräta asymptoter som helst.

Ett exempel på en funktion med två sneda asymptoter är $f(x) = |\frac{1}{x} + 3x|$, se nedan.



Rationella funktioner har i allmänhet lodräta asymptoter där de ej är definierade. Se exemplet i §1.

§4 Så här kan det gå till att bestämma asymptoter: Vi betraktar $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

Först gör vi omskrivningen $f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}}$.

Nu kan vi se att $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. Alltså är $y = 1$ en vågrät asymptot.

Vidare ser vi att f är en rationell funktion. Den är ej definierad för $x = 2$. Då har vi en lodrät asymptot $x = 2$.

Om vi ska skissa grafen kan vi efter lite funderande inse att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 2^+$ och att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 2^-$, vilket hjälper oss att reda ut hur grafen går.

Desmos ger "facit":